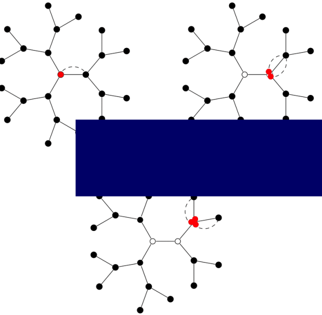
PGE966 - Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



PROCESSOS DE POISSON

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Distribuição de Poisson
- Distribuição exponencial
- Processo de Poisson

Distribuição de Poisson

X tem *distribuição de Poisson* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$.

Observação!

X pode ser interpretada como uma aproximação para o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados, assumindo valores grandes de n e pequenos de p.

Soma

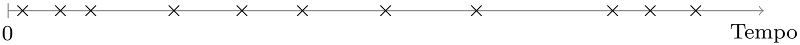
Se $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$ e são independentes então:

$$X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu).$$

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{i=0}^{n} P(\{X+Y=n\} \cap \{Y=i\}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P(\{X=n-i\} \cap \{Y=i\}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P(X=n-i)P(Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left\{ \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-i}}{(n-i)!} \right\} \left\{ \frac{e^{-\mu}\mu^{i}}{i!} \right\} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^{n-i} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Processo de Poisson de parâmetro λ

Um Processo de Poisson de parâmetro λ unidimensional pode ser representado como uma sequência de pontos ou marcas em $\mathbb{R}^+$:



tais que, se $N(B)$ = número de pontos contidos no intervalo $B \subset \mathbb{R}^+$, então:

- $N(B) \sim Poisson(\lambda|B|)$;
- $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^+$ intervalos, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, então $N(B_1)$ e $N(B_2)$ são independentes.

Observação!

Podemos estender o anterior para qualquer $B \in \mathcal{B}$, com $|B|$ representando a medida de Lebesgue de B.

Exemplo 1

Suponha que as ocorrências de um evento de interesse acontecem segundo um P.P.(10). Se $N(s,t)$ denota o número de ocorrências entre os instantes s e t, determine $P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)$.

Solução. *Note que*

$$P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)=\frac{P(\{N(0,1)=2\}\cap\{N(0,5)=5\})}{P(N(0,5)=5)},$$

e $N(0,5)\sim \text{Poisson}(50)$: $P(N(0,5)=5)=e^{-50}\dfrac{50^5}{5!}$. *Por outro lado,*

$$\{N(0,1)=2\}\cap\{N(0,5)=5\}=\{N(0,1)=2\}\cap\{N(1,5)=3\}.$$

Então

$$P(\{N(0,1)=2\}\cap\{N(0,5)=5\})=P(\{N(0,1)=2\})P(\{N(1,5)=3\}).$$

... continuação do Exemplo 1. Finalmente,

$$P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)=\frac{\left\{e^{-10}\dfrac{10^2}{2!}\right\}\left\{e^{-40}\dfrac{40^3}{3!}\right\}}{e^{-50}\dfrac{50^5}{5!}},$$

que reescrevendo é:

$$P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3.$$

Observação!

Para um $P.P.(\lambda)$: dado que $N(0,t)=n$, as posições dos n pontos estão distribuídas em $(0,t)$ como n variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $U(0,t)$.

Distribuição Exponencial

X tem *distribuição exponencial* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim Exp(\lambda)$.

Observação!

Usualmente usada para descrever o tempo até a ocorrência de um evento de interesse.

Se $X \sim Exp(\lambda)$ então $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Perda de memória

Proposição 1

Se $X \sim Exp(\lambda)$ *então*

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t), \quad para\ s, t \in (0, \infty).$$

Prova. Note que

$$P(X > t + s | X > s) = \frac{P(\{X > t + s\} \cap \{X > s\})}{P(X > s)}$$

mas $\{X > t + s\} \subset \{X > s\}$, então

$$P(X > t + s | X > s) = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t).$$

Mínimo de exponenciais independentes

Proposição 2

Se $X_1, \ldots, X_n$ *são independentes com* $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, *então*

$$\min\{X_1, \ldots, X_n\} \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Prova. Note que

$$P\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > a\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > a) = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) a}.$$

“Competição” de exponenciais

Proposição 3

Se X_1 e X_2 são independentes com $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i \in \{1, 2\}$, então

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Prova. Note que

$$\begin{aligned}
P(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty P(X_1 < X_2 | X_1 = t)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, dt \\
&= \int_0^\infty P(X_2 > t)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\, dt \\
&= \int_0^\infty \lambda_1\, e^{-\lambda_2 t}\, e^{-\lambda_1 t}\, dt \\
&= \int_0^\infty \lambda_1\, e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t}\, dt \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2

Ocorrências de um evento de acordo com um P.P.(λ). Se T_1 é o instante da primeira ocorrência então $T_1 \sim Exp(\lambda)$. De fato, se

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t),$$

como

$$\{T_1 > t\} = \{N(0,t) = 0\},$$

e $N(0,t) \sim Poisson(\lambda t)$, então

$$F_{T_1}(t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - P(N(0,t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Observação!

Para um P.P.(λ): se $T_1, T_2, \ldots$ são as distâncias entre um ponto e o seguinte ponto do processo então estas são i.i.d. com distribuição $T_1 \sim Exp(\lambda)$.

Distribuição gama

X tem *distribuição gama* com parâmetros $\alpha \in (0, \infty)$ e $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1}\, dy$ (função gama).

Notação: $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$.

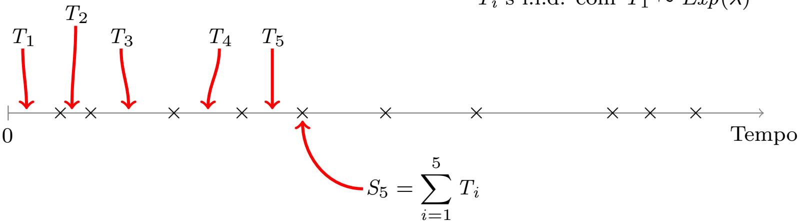
Observação!

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$. *Em particular,* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *se* $n \in \mathbb{N}$.

Processo de Poisson

Lembre que:

T_i's i.i.d. com $T_1 \sim Exp(\lambda)$



Observação!

Se $T_1, T_2, \ldots, T_n$ são i.i.d. com $T_1 \sim Exp(\lambda)$ então $\sum_{i=1}^{n} T_i \sim Gama(n, \lambda)$.

Processo de contagem

Um processo estocástico a tempo contínuo $(N(t))_{t\geq 0}$ tal que

$N(t)$ é o # de eventos de interesse que ocorrem até o instante t,

chama-se processo de contagem. Tal processo satisfaz:

- $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, para todo $t \geq 0$;
- $N(s) \leq N(t)$ se $s < t$;
- Para $s < t$,

$$N(s,t) := N(t) - N(s)$$

é igual ao # de eventos que ocorrem na janela de tempo $(s,t]$.

Incrementos

Dizemos que o processo $(N(t))_{t\geq 0}$ tem:

- incrementos independentes se

$$N(I_1) \text{ e } N(I_2) \text{ são independentes}$$

  para intervalos disjuntos I_1 e I_2; i.e., $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

- incrementos estacionários se

$$N(s, s+t) = N(0, t) \text{ em distribuição,}$$

  para quaisquer $s, t \geq 0$.

Processo de Poisson

Definição 1

O processo de contagem $(N(t))_{t\geq 0}$ *é um processo de Poisson de parâmetro* λ, $\lambda > 0$, *se:*

i. $N(0) = 0$;

ii. *o processo tem incrementos independentes;*

iii. *para todo* $s, t \geq 0$, *com* $s < t$,

$$N(s,t) \sim Poisson(\lambda(t-s)).$$

Denotamos $(N(t))_{t\geq 0} \sim P.P.(\lambda)$.

Processo de Poisson

Definição 2

O processo de contagem $(N(t))_{t\geq 0}$ *é um processo de Poisson de parâmetro* λ, $\lambda > 0$, *se:*

i. $N(0) = 0$;

ii. *o processo tem incrementos independentes e estacionários;*

iii. $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$;

iv. $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

Observação

Uma função f *é* $o(h)$ *se* $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

Exercício: Prove que as Definições 1 e 2 são equivalentes ver Ross, p. 315.

Proposição 4

Os temos entre chegadas $T_1, T_2, \ldots$ são v.a. i.d.d. com $T_1 \sim Exp(\lambda)$.

Prova. Sabemos que $T_1 \sim Exp(\lambda)$. Note que

$$
\begin{aligned}
P(T_2 > t, T_1 > s) &= \int_s^\infty P(T_2 > t, T_1 = x)\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \int_s^\infty P(T_2 > t | T_1 = x)\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \int_s^\infty P(N(x, x+t) = 0 | T_1 = x)\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \int_s^\infty P(N(x, x+t) = 0)\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&= P(N(0,t) = 0) \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&= e^{-\lambda t} e^{-\lambda s}.
\end{aligned}
$$

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Então, $T_2 \sim Exp(\lambda)$ e é independente de T_1.

Proposição 5

Dado que $N(t) = n$, os n temos de chegada $S_1, S_2, \ldots S_n$ têm a mesma distribuição que as estatísticas de ordem de n v.a. i.i.d. com distribuição comum uniforme no intervalo $(0, t)$.

Prova. $\{S_1 = s_1, S_2 = s_2, \ldots, S_n = s_n, N(t) = n\}$ é equivalente a

$$\{T_1 = s_1, T_2 = s_2 - s_1, \ldots, T_n = s_n - s_{n-1}, T_{n+1} > t - s_n\}.$$

Então, a densidade conjunta condicional de $S_1, \ldots, S_n$ dado que $N(t) = n$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(s_1, \ldots, s_n | n) &= \frac{f(s_1, \ldots, s_n | n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} \ldots \lambda e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} e^{-\lambda(t - s_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!} \\ &= \frac{n!}{t^n}, \end{aligned}$$

para $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < t$.

Lembre o Exemplo 1: Suponha as ocorrências de um evento de acordo a um $P.P.(10)$. Determine $P(N(0,1) = 2|N(0,5) = 5)$.

Note que, dado que $N(0,5) = 5$, os cinco pontos estão distribuídos como as estatísticas de ordem de 5 v.a. $U_1, \ldots, U_5$ i.i.d. com $U_1 \sim Uniforme(0,5)$. Assim, dado que $N(0,5) = 5$, temos que

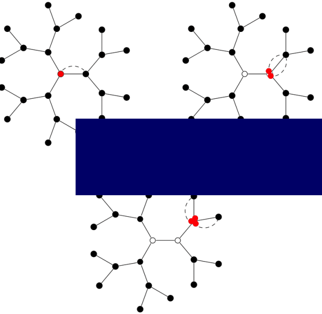
$$N(0,1) = \sum_{i=1}^{5} I_{\{U_i \in (0,1]\}} \sim Binomial(5, 1/5).$$

Logo,

$$P(N(0,1) = 2|N(0,5) = 5) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^3.$$

Referências

Sheldon M. Ross. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010. (Capítulo 5)



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org

e-mail: pablo@de.ufpe.br