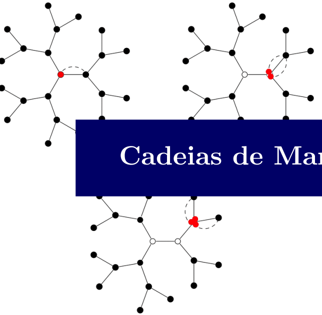
ET658 - Processos Estocásticos para Atuária

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



Cadeias de Markov a tempo discreto: exemplos e problemas

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et658-processos-estocasticos

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 4

- Cadeias de Markov a tempo discreto.
  - Exemplos;
  - Problemas.

Lembrete: Cadeia de Markov

Uma cadeia de Markov a tempo discreto (CMTD) com espaço de estados $\mathcal{S}$ é um processo estocástico $(X_n)_{n\geq 0}$ com valores em $\mathcal{S}$ tal que

$$\underbrace{P(X_{n+1}}_{\text{futuro}} = j|\underbrace{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}}_{\text{pasado}}, \underbrace{X_n}_{\text{presente}} = i) = P(X_{n+1} = j|X_n = i),$$

para todo $n \geq 0$ e para todo subconjunto $\{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j\} \subset \mathcal{S}$.

Lembre que: para todo $i, j \in \mathcal{S}$ denotamos

- $p(i,j) := P(X_{n+1} = j|X_n = i)$, para todo $n \geq 0$;
- $p_n(i,j) := P(X_{m+n} = j|X_m = i)$, para todo $m, n \geq 0$.

Equações de Chapman-Kolmogorov

Proposição 4.1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$*. Então,*

$$p_{n+r}(i,j) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_n(i,k)p_r(k,j),$$

para todo $n, r \geq 0$ *e* $i, j \in \mathcal{S}$.

Exemplo 4.1

Considere uma CMTD com $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$*. Para calcular* $p_2(1,3)$*:*

$$p_2(1,3) = p(1,1)p(1,3) + p(1,2)p(2,3) + p(1,3)p(3,3).$$

Problema 1

Considere a cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ *com espaço de estados* $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ *e matriz de transição dada por*

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

com $P(X_0 = 0) = 0,2,\ P(X_0 = 1) = 0,3,\ P(X_0 = 2) = 0,5.$ *Calcule:*

a. $P(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 2)$;

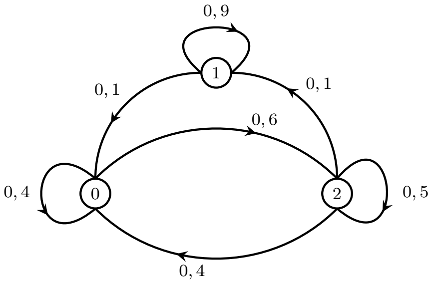
b. $P(X_1 = 2, X_2 = 1 | X_0 = 0)$;

c. $P(X_2 = 1, X_3 = 1 | X_0 = 0)$.

Solução do Problema 1. Como

$$P = \begin{pmatrix} p(0,0) & p(0,1) & p(0,2) \\ p(1,0) & p(1,1) & p(1,2) \\ p(2,0) & p(2,1) & p(2,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

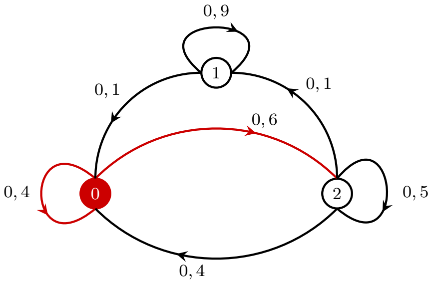
temos:



Solução do Problema 1. Como

$$P = \begin{pmatrix} p(0,0) & p(0,1) & p(0,2) \\ p(1,0) & p(1,1) & p(1,2) \\ p(2,0) & p(2,1) & p(2,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

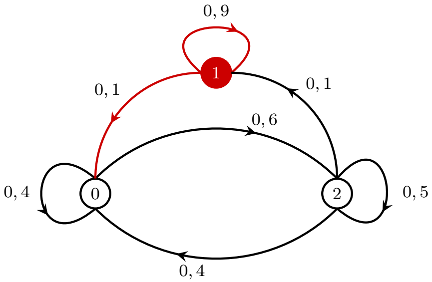
temos:



Solução do Problema 1. Como

$$P = \begin{pmatrix} p(0,0) & p(0,1) & p(0,2) \\ p(1,0) & p(1,1) & p(1,2) \\ p(2,0) & p(2,1) & p(2,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

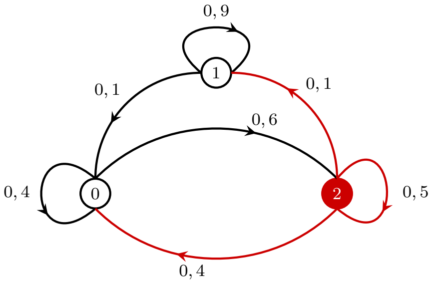
temos:



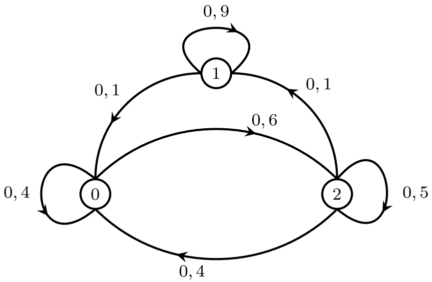
Solução do Problema 1. Como

$$P = \begin{pmatrix} p(0,0) & p(0,1) & p(0,2) \\ p(1,0) & p(1,1) & p(1,2) \\ p(2,0) & p(2,1) & p(2,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

temos:



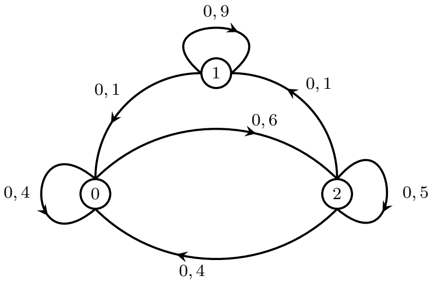
... continuação do Problema 1. Então



a.

$$
\begin{aligned}
P(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 2) &= P(X_0 = 0) \times p(0,0) \times p(0,2) \\
&= 0,2 \times 0,4 \times 0,6 \\
&= 0,048
\end{aligned}
$$

. . . continuação do Problema 1. Da mesma forma



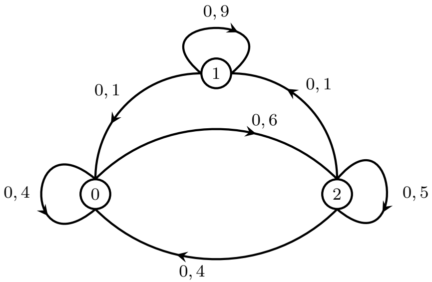
b.

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 2, X_2 = 1 | X_0 = 0) &= p(0,2) \times p(2,1) \\
&= 0,6 \times 0,1 \\
&= 0,06
\end{aligned}
$$

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

... continuação do Problema 1. Finalmente



c. $P(X_2 = 1, X_3 = 1|X_0 = 0) = p_2(0, 1) \times p(1, 1)$ e como

$$p_2(0, 1) = p(0, 2) \times p(2, 1) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$$

concluimos que $P(X_2 = 1, X_3 = 1|X_0 = 0) = 0,06 \times 0,9 = 0,054.$

Outra forma de definir uma cadeia de Markov

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ um processo com valores no conjunto $\mathcal{S}$. Se existe uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d.

$$U_1, U_2, \ldots$$

com distribuição comum uniforme no intervalo $(0,1)$ e uma função

$$f : \mathcal{S} \times (0,1) \to \mathcal{S}$$

tal que

$$X_{n+1} = f(X_n, U_n),$$

para todo $n \geq 0$, dizemos que $(X_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo discreto.

Exemplo 4.2

Considere o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$, $(Y_n)_{n\geq 0}$. *Se* $U_1, U_2, \ldots$ *são i.i.d. com* $U_1 \sim Uniforme(0,1)$ *então podemos escrever*

$$Y_{n+1} = f(Y_n, U_n),$$

onde a função $f : \mathbb{Z} \times (0,1) \to \mathbb{Z}$ *é dada por*

$$f(i,u) := \begin{cases} i+1, & si\ u < p, \\ i-1, & si\ u \geq p. \end{cases}$$

Exemplo: o processo de ramificação

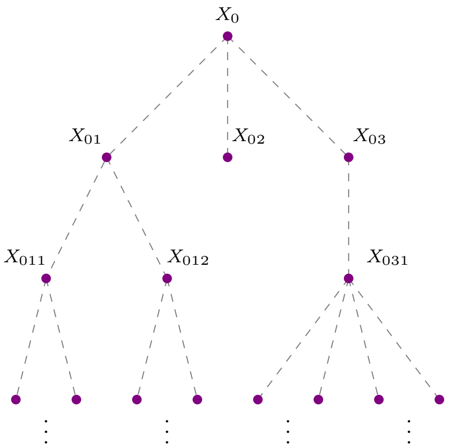
Considere uma variável aleatória discreta X com função de probabilidade

$$P(X = i) = p_i,$$

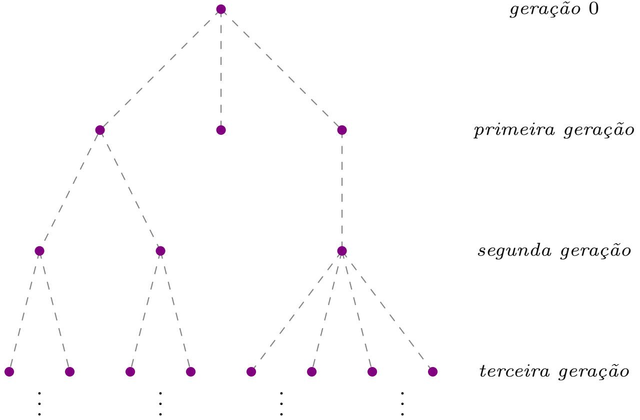
para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

No que segue, todas as variáveis são cópias independentes de X.

Processo de ramificação: ideia



Processo de ramificação: gerações



Processo de ramificação: a cadeia de Markov

Considere, para cada $n \geq 0$, a variável aleatória:

$$Z_n = \# \text{ de partículas da } n\text{-ésima geração},$$

e note que para todo $n \geq 1$ temos:

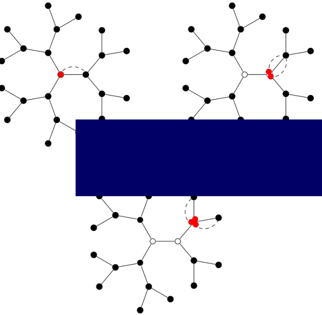
$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i,$$

onde $X_1, X_2, \ldots$ são i.i.d. à v.a. X. A sequência $(Z_n)_{n \geq 0}$ chama-se processo de ramificação ou processo de Galton-Watson e é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} P\left(\sum_{r=1}^{i} X_r = j\right), & \text{para } i \geq 1 \text{ e } j \geq 0, \\ 0, & \text{para } i = 0 \text{ e } j > 0, \\ 1, & \text{para } i = 0 \text{ e } j = 0. \end{cases}$$

Referência!

Ross, S. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010.



Bom estudo!