Aula 14: Método do Jacobiano

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Método do Jacobiano: exemplos.

O método do Jacobiano

- Sejam $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}$ duas regiões abertas de $\mathbb{R}^n$ e $g : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}$ bijetora tal que $g(x_1, \ldots, x_n) = (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n))$. Existe $h = g^{-1}$ em $\mathcal{A}$ tal que se $y_i := g_i(x_1, \ldots, x_n)$, então

$$x_i = h_i(y_1, \ldots, y_n), \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

- Para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, as derivadas parciais

$$\frac{\partial h_i(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}, \text{ existem e são contínuas em } \mathcal{A}$$

- O Jacobiano $J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \neq 0.$

O método do Jacobiano

Então, para qualquer $A \subset \mathcal{A}_0$ temos que

$$\int \cdots \int_A f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots\, dx_n =$$

$$= \int \cdots \int_{g(A)} f(h_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n(y_1, \ldots, y_n))\, |J(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\, dy_1 \cdots\, dy_n,$$

para qualquer função f integrável em $A \subset \mathcal{A}_0$.

O método do Jacobiano

Considere $g : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}$ como antes e considere $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias com densidade conjunta $f(x_1, \ldots, x_n)$ tal que

$$P((X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{A}_0) = 1.$$

Se $Y_1, \ldots, Y_n$ são variáveis aleatórias tais que

$$Y_i = g_i(X_1, \ldots, X_n), \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}$$

então

$$f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = f(h_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n(y_1, \ldots, y_n)) \, |J(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$$

se $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$, e $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = 0$ se $\mathbf{y} \notin \mathcal{A}$.

Exemplo 14.1

Sejam $X \sim U(0,1)$ *e* $Y \sim U(0,1)$ *independentes. Vamos encontrar a densidade conjunta de:*

$$U = X \quad e \quad V = \frac{X}{Y}.$$

Note que U *toma valores em* $(0,1)$ *e* V *em* $(0,\infty)$*. Por outro lado:*

$$\text{Como} \qquad \begin{cases} u = g_1(x,y) = x, \\ v = g_2(x,y) = \dfrac{x}{y} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = h_1(u,v) = u, \\ y = h_2(u,v) = \dfrac{u}{v} \end{cases}$$

$$\text{temos que } J(u,v) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \end{bmatrix} = -\frac{u}{v^2} \neq 0.$$

... continuação do Exemplo 14.1. Pelo método do Jacobiano temos:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{u}{v^2} f_{X,Y}(h_1(u,v), h_2(u,v)).$$

Verificando quando $h_1(u,v) \in (0,1)$ e $h_2(u,v) \in (0,1)$, concluímos:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{u}{v^2}, & \text{se } 0 < u < 1 \text{ e } u < v < \infty, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exercício!

Verifique que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\, du\, dv = 1.$

Exercício!

Encontre a densidade conjunta de:

a. $U = X + Y$ *e* $V = X/Y$,

b. $U = X + Y$ *e* $V = X/(X+Y)$.

Exemplo 14.2

Sejam $X \sim Exp(1), Y \sim Exp(1), Z \sim Exp(1)$ *independentes. Vamos encontrar a densidade conjunta de:*

$$U = X + Y, \quad V = X + Z \quad e \quad W = Y + Z.$$

Note que U, V *e* Z *toma valores em* $(0, \infty)$*. Por outro lado, como*

$$\begin{cases} u = g_1(x, y, z) = x + y, \\ v = g_2(x, y, z) = x + z, \\ z = g_3(x, y, z) = y + z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = h_1(u, v, w) = (u + v - w)/2, \\ y = h_2(u, v, w) = (u + w - v)/2, \\ z = h_3(u, v, w) = (v + w - u)/2 \end{cases}$$

$$\text{temos que } J(u, v, w) = \det \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = -1/2 \neq 0.$$

... continuação do Exemplo 14.2. Pelo método do Jacobiano temos:

$$f_{U,V,W}(u,v,w) = \frac{1}{2} f_{X,Y,Z}(h_1(u,v,w), h_2(u,v,w), h_3(u,v,w)).$$

Verificando quando $h_i(u,v,w) > 0$, $i \in \{1,2,3\}$, concluímos:

$$f_{U,V,W}(u,v,w) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, e^{\left\{-\frac{1}{2}(u+v+w)\right\}}, & \text{se } (u,v,w) \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

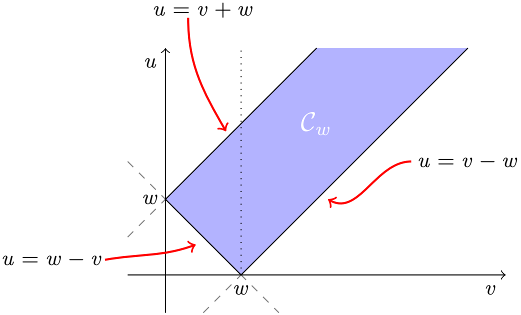
onde

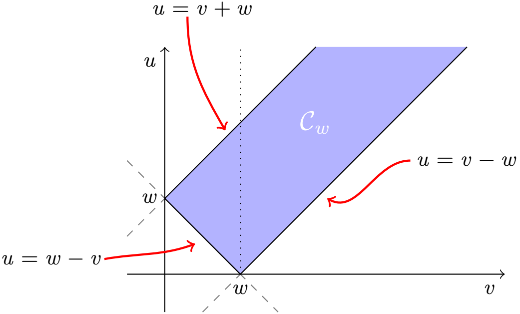
$$\mathcal{C} = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : 0 < u,v,w < \infty, u+v > w, u+w > v, v+w > u\right\}.$$

... continuação do Exemplo 14.2. Vamos verificar que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V,W}(u, v, w)\, du\, dv\, dw = 1.$$

Note que, fixado $w \in (0, \infty)$ temos que $(u, v, w) \in \mathcal{C}$ se $(u, v) \in \mathcal{C}_w$:





Assim, temos que $2I$ é dado por

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^w \int_{w-v}^{w+v} e^{-\frac{1}{2}(u+v+w)}\, du\, dv + \int_w^\infty \int_{v-w}^{v+w} e^{-\frac{1}{2}(u+v+w)}\, du\, dv \right\} dw$$

... que, após vários cálculos, permite concluir que $I = 1$.

Exemplo 14.3

Sejam $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$ *e* $Y \sim Gama(\beta, \lambda)$ *independentes. Vamos encontrar a densidade conjunta de:*

$$U = X + Y \quad e \quad V = \frac{X}{X+Y}.$$

Note que U *toma valores em* $(0, \infty)$ *e* V *toma valores em* $(0, 1)$. *Por outro lado, como*

$$\begin{cases} u = g_1(x,y) = x + y, \\ v = g_2(x,y) = \dfrac{x}{x+y} \end{cases} \implies \begin{cases} x = h_1(u,v) = uv, \\ y = h_2(u,v) = u(1-v) \end{cases}$$

temos que $J(u,v) = \det \begin{bmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{bmatrix} = -uv - u(1-v) = -u \neq 0.$

... continuação do Exemplo 14.4. Pelo método do Jacobiano temos:

$$f_{U,V}(u,v) = u\, f_{X,Y}(h_1(u,v), h_2(u,v)).$$

Verificando quando $h_1(u,v) \in (0,\infty)$ e $h_2(u,v) \in (0,\infty)$ concluímos:

$$f_{U,V}(u,v) = \left\{ \frac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right\} \left\{ \frac{v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right\},$$

se $0 < u < \infty$ e $0 < v < 1$, e $f_{U,V}(u,v) = 0$ caso contrário. Portanto,

$$U \sim Gama(\alpha+\beta, \lambda), \quad V \sim Beta(\alpha, \beta) \quad \text{e são independentes.}$$

Exemplo 14.4

Sejam $X \sim \chi^2(m)$ *e* $Y \sim \chi^2(n)$ *independentes. Vamos encontrar a densidade de*

$$U = \frac{X/m}{Y/n}.$$

Para isto, encontramos primeiro a conjunta de

$$U = \frac{X/m}{Y/n} \quad e \quad V = Y.$$

Note que U *e* V *tomam valores em* $(0, \infty)$*. Por outro lado, como*

$$\begin{cases} u = g_1(x, y) = \frac{x/m}{y/n}, \\ v = g_2(x, y) = y \end{cases} \implies \begin{cases} x = h_1(u, v) = uv(m/n), \\ y = h_2(u, v) = v \end{cases}$$

temos que $J(u, v) = v(m/n) \neq 0$.

... continuação do Exemplo 14.4. Pelo método do Jacobiano temos:

$$f_{U,V}(u,v) = v(m/n)\, f_{X,Y}(h_1(u,v), h_2(u,v)).$$

Verificando quando $h_1(u,v) \in (0,\infty)$ e $h_2(u,v) \in (0,\infty)$ concluímos:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{v(m/n)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} \left(\left\{ \frac{m}{n} \right\} uv \right)^{\frac{m}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(\{m/n\}uv+v)},$$

se $u, v \in (0,\infty)$ e $f_{U,V}(u,v) = 0$, caso contrário.

Agora, vamos encontrar

$$f_U(u) = \int_0^\infty f_{U,V}(u,v)\, dv.$$

... continuação do Exemplo 14.4. Note que, se $u \in (0, \infty)$

$$f_U(u) = \frac{u^{(m/2)-1}(m/n)^{m/2}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)2^{(m+n)/2}} \int_0^\infty v^{\frac{(m+n)}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(\{m/n\}u+1)v}\, dv$$

Portanto,

$$f_U(u) = \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \left\{\frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\right\} \frac{u^{(m/2)-1}}{(\{m/n\}\, u+1)^{(m+n)/2}}, \qquad (1)$$

se $0 < u < \infty$, e $f_U(u) = 0$, caso contrário.

Observação!

Uma variável aleatória U tem distribuição F de Snedecor com n graus de liberdade no numerador e m graus de liberdade no denominador se sua densidade é dada por (1). Notação: $U \sim F(m, n)$.

Teorema 14.1

Se $X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$ *e são independentes, então*

$$U = \frac{X/m}{Y/n} \sim F(m, n).$$

Teorema 14.2

Se $X \sim \chi^2(n)$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ *e são independentes, então* $U = \dfrac{Z}{\sqrt{X/n}}$ *tem densidade dada por*

$$f_U(u) = \frac{\Gamma(\{n+1\}/2)}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) \frac{1}{(1+u^2/n)^{(n+1)/2}}, \quad \textit{para } -\infty < u < \infty. \tag{2}$$

Ideia da prova. Use o método do Jacobiano para encontrar a densidade conjunta de U e $V = X$. Logo, encontre a marginal $f_U(u)$ a partir de $f_{U,V}(u,v)$ como no teorema anterior.

Observação!

Uma variável aleatória U *tem distribuição* t *de Student com* n *graus de liberdade se sua densidade é dada por* (2). *Notação:* $U \sim t_n$.

Bom estudo!