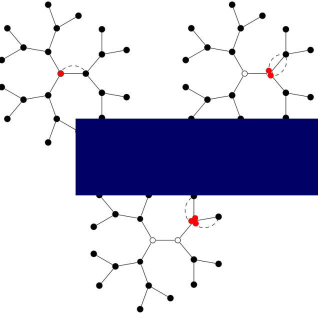
PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



PERCOLAÇÃO INDEPENDENTE DE ELOS

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Modelo de percolação
- Transição de fase
- Percolação em árvores

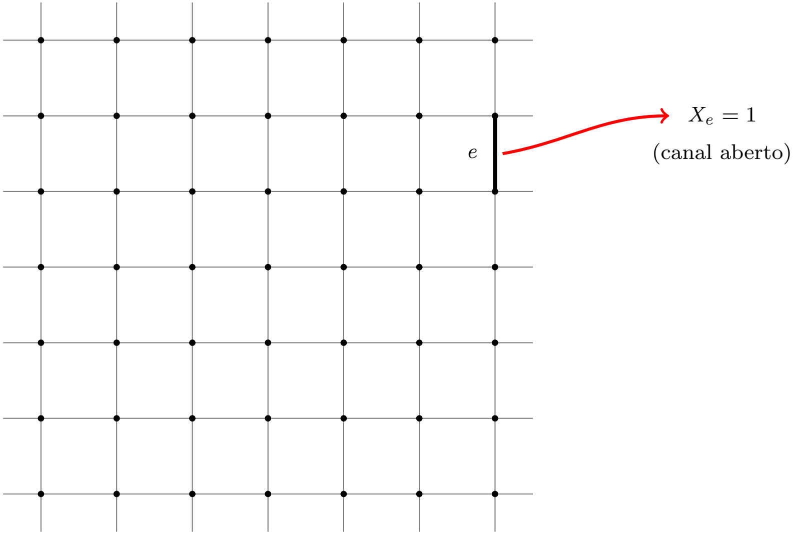
O modelo de percolação: motivação

Proposto por Broadbent e Hammersley em (1957):

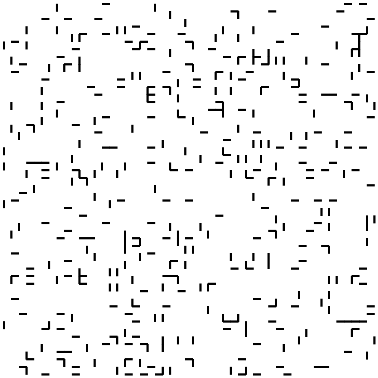
- Percolação: transporte de um fluido através de um meio poroso.
- Meio: poros e canais microscópicos por onde passaria o fluido.
- Situação: cada canal está aberto ou fechado à passagem do fluido.

Observação

Representa-se o fenômeno pela família $(X_e)_{e \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)}$, $X_e \sim \mathit{Bernoulli}(p)$, *de v.a. de i.i.d. Chama-se modelo de percolação independente de elos em* $\mathbb{Z}^d$.

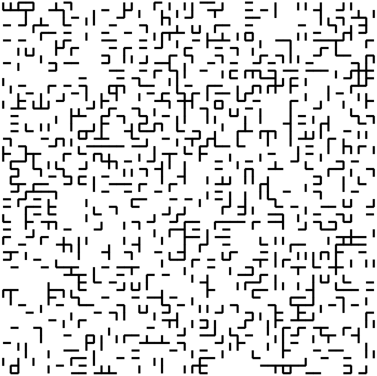

e
$X_e = 1$
(canal aberto)

Possível realização do modelo em $\mathbb{Z}^2$



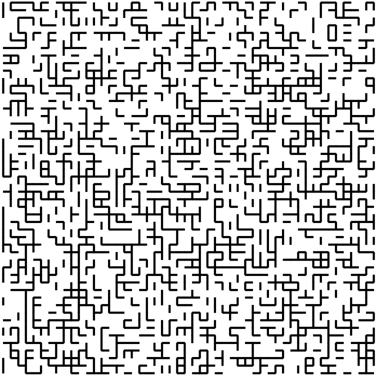
$$p = 0,10$$

Possível realização do modelo em $\mathbb{Z}^2$



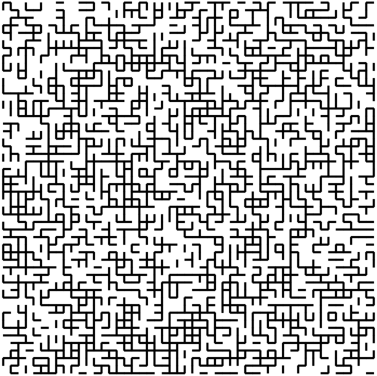
$$p = 0,25$$

Possível realização do modelo em $\mathbb{Z}^2$



$$p = 0,40$$

Possível realização do modelo em $\mathbb{Z}^2$

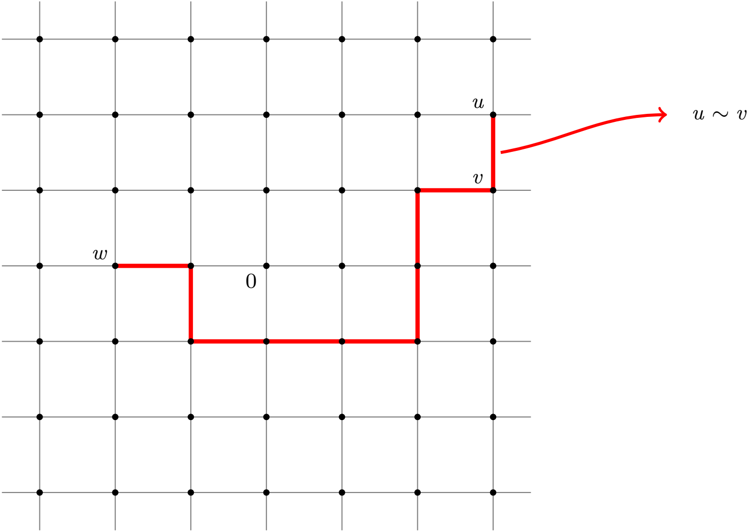


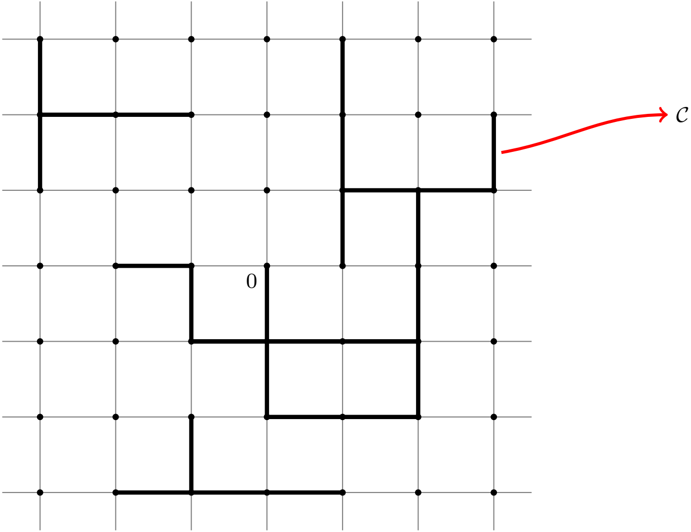
$$p = 0,50$$

Existe um caminho infinito de elos abertos atravessando o grafo?

Notação

- Consideramos $\mathbb{Z}^d = (\mathbb{Z}^d, E)$,
- Se $\{u, v\} \in E$ dizemos que u, v são vizinhos e denotamos $u \sim v$,
- um caminho do grafo é uma sequência $v_0, v_1, \ldots, v_n$ de vértices tais que $v_i \sim v_{i+1}$, para cada i.
- Denotamos por $\mathcal{C}$ ao conjunto de vértices de $\mathbb{Z}^d$ que estão conectados à origem através de um caminho de elos abertos.
  - Note que $\mathcal{C}$ é um conjunto aleatório.


u
v
w
0
$u \sim v$


0
$\mathcal{C}$

Transição de fase

O evento $\{|\mathcal{C}| = \infty\}$ chama-se percolação.

Teorema 1

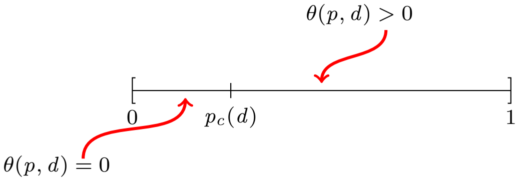
Seja $\theta(p, d) = P(|\mathcal{C}| = \infty)$*. Para* $d \geq 2$*, existe um valor crítico*

$$p_c(d) \in (0, 1)$$

tal que

i. $\theta(p, d) = 0$ *se* $p < p_c(d)$.

ii. $\theta(p, d) > 0$ *se* $p > p_c(d)$.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

Sobre a prova

A prova é separada en três partes:

1. Definir: $p_c(d) := \inf\{p \in [0,1] : \theta(p,d) > 0\}$.

   Uma vez definido, garantir que $p_c(d) \in (0,1)$.

   2. Para isto encontramos um limitante inferior positivo de $p_c(d)$
   3. e um limitante superior que seja menor que 1.

Observação

$$p_c(1) = 1,\ p_c(2) = 1/2,\ p_c(d) \sim 1/2d.$$

Ref.: *Notas em Percolação, Luiz R. Fontes (IME-USP), 1996.*
Disponible en: `https://www.ime.usp.br/~lrenato`

Ref.: *Kesten, H. (2006). What Is ... Percolation?, Notices Amer. Math. Soc.* **53** *n.5, 572-573.*

Prova do Teorema 1 - Parte 1

Definimos:

$$p_c(d) := \inf\{p \in [0,1] : \theta(p,d) > 0\},$$

que é possível porque $\theta(p,d)$ é não decrescente como função de p.

Para mostrar que, de fato:

$$\theta(p_1,d) \leq \theta(p_2,d) \ \text{ se } \ p_1 < p_2$$

usamos um argumento de acoplamento.

Para cada elo e consideramos uma variável aleatória $U_e \sim U(0,1)$ e definimos:

$$X_e(p_1) := \begin{cases} 1, & \text{se } U_e \leq p_1, \\ 0, & \text{se } U_e > p_1, \end{cases} \quad \text{e} \quad X_e(p_2) := \begin{cases} 1, & \text{se } U_e \leq p_2, \\ 0, & \text{se } U_e > p_2. \end{cases}$$

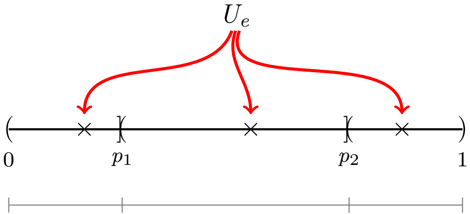
Note que, assim definidas,

$$X_e(p_1) \sim Bernoulli(p_1), \;\; X_e(p_2) \sim Bernoulli(p_2)$$

e que

$$X_e(p_1) \leq X_e(p_2).$$

Fixe um elo e e considere $U_e \sim U(0,1)$:



$X_e(p_2) =$	1	1	0
$X_e(p_1) =$	1	0	0

Podemos estender esta ideia para toda a família de v.a. envolvidas em cada modelo – as quais serão definidas a partir de uma mesma família de v.a. i.i.d. uniformes no $(0,1)$ – para garantir que $\mathcal{C}_{p_1} \subset \mathcal{C}_{p_2}$. Logo, $\theta(p_1, d) \leq \theta(p_2, d)$.

Prova do Teorema 1 - Parte 2: $p_c(d) > 0$

- Um camino autoevitante, ou *self-avoiding walk*, é um caminho que une dois vértices de um grafo com a condição de que o caminho no passa pelo mesmo vértice mais de uma vez.
- Notação: para d fixo, denotamos por
  - $\sigma_n =$ número de caminhos autoevitantes de comprimento n que começam na origem de $\mathbb{Z}^d$.
  - $N_n =$ número de caminhos autoevitantes de comprimento n tais que todos seus elos estão abertos.

Note que $\{N_n \geq 1\} \searrow$. Então:

$$P(|\mathcal{C}| = \infty) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{N_n \geq 1\}\right) = \lim_{n\to\infty} P(N_n \geq 1), \qquad (1)$$

Agora, considere para $i \in \{1, \ldots, \sigma_n\}$, a v.a. $\mathbf{1}_i$ indicadora do evento de que todos os elos do i-ésimo caminho autoevitante de comprimento n começando na origem estão abiertos. Então,

$$N_n = \sum_{i=1}^{\sigma_n} \mathbf{1}_i,$$

e assim $\mathbb{E}(N_n) = \sigma_n p^n$. A desigualdade de Markov implica que $P(N_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(N_n)$ que, do anterior, nos leva concluir que $\theta(p, d) = 0$ desde que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n p^n = 0.$$

Para finalizar esta parte é suficiente observar que

$$\sigma_n < 2d(2d-1)^{n-1}$$

e que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2d}{2d-1}\right\}\{(2d-1)p\}^n = 0$$

se $p < 1/(2d-1)$. Em outras palavras, acabamos de mostrar que:

$$p_c(d) \geq \frac{1}{(2d-1)} > 0.$$

Prova do Teorema 1 - Parte 3: $p_c(d) < 1$

A primeira observação é que $\theta(p, d)$ é não decrescente como função de d. A prova é por acoplamento de modelos de percolação, com o mesmo parâmetro p, em diferentes dimensões. Note que uma realização do modelo em $\mathbb{Z}^d$ pode-se identificar com uma realização do modelo em um hiperplano de $\mathbb{Z}^{d+1}$. Logo, percolação em d dimensões implica percolação em $d + 1$ dimensões. Desta forma podemos concluir que

$$\theta(p, d) \leq \theta(p, d + 1),$$

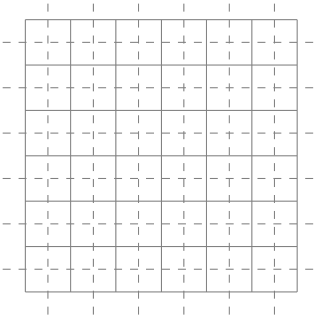
o que implica que

$$p_c(d) \geq p_c(d + 1),$$

para todo $d \geq 2$. Então, para mostrar que $p_c(d) < 1$ basta mostrar que $p_c(2) < 1$.

Consideramos a rede bidimensional dual de $\mathbb{Z}^2$; i.e.,

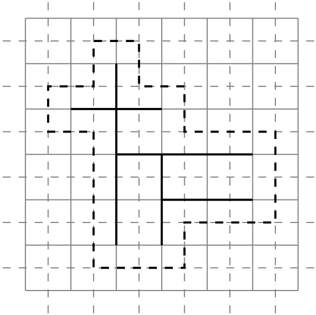
$$\mathbb{Z}^2_* := \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$$



Qualquer realização do modelo em $\mathbb{Z}^2$ induz uma realização do modelo em $\mathbb{Z}^2_*$. Isto é feito abrindo um elo de $\mathbb{Z}^2_*$ sempre que o respectivo elo de $\mathbb{Z}^2$ que o atravessa esteja abierto.

Nos auxiliamos do modelo em $\mathbb{Z}^2_*$ para obter o resultado de interesse para $\mathbb{Z}^2$. Seja X_n o número de ciclos de comprimento n de $\mathbb{Z}^2_*$ que contêm $(0,0)$ no seu interior e tais que todos seus elos estão fechados.

Note que $\{|\mathcal{C}| < \infty\} = \bigcup_{n=4}^{\infty} \{X_n \geq 1\}$.



De fato, se $\mathcal{C}$ for finito, então existe um ciclo de $\mathbb{Z}^2_*$ que contêm $(0,0)$ e tal que todos seus elos estão fechados.

Então,

$$P\left(|\mathcal{C}| < \infty\right) \leq \sum_{n=4}^{\infty} P\left(X_n \geq 1\right) \leq \sum_{n=4}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_n\right) \leq \sum_{n=4}^{\infty} n4^n(1-p)^n, \quad (2)$$

onde usamos a desigualdade de Markov e o fato de que el número de ciclos de comprimento n rodeando el $(0,0)$ é de no máximo $n4^n$ ciclos.

Agora, como,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left\{4(1-p)\right\}^{n-1} = \frac{1}{1-16(1-p)^2}, \quad (3)$$

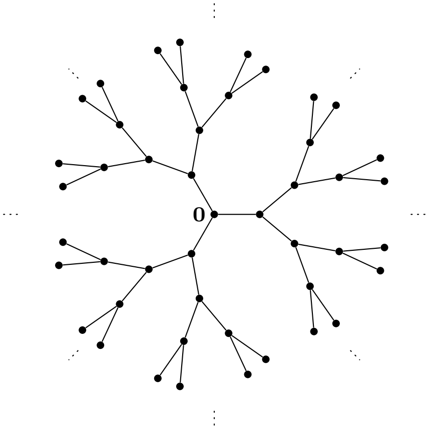
desde que $p \in (3/4, 1]$ e como

$$\frac{4(1-p)}{1-16(1-p)^2} < 1 \text{ se, e somente se, } p > \frac{9-\sqrt{5}}{8}, \quad (4)$$

concluimos de (2)-(4) que $p_c(2) \leq \frac{9-\sqrt{5}}{8} < 1$.

Modelo de percolação em árvores homogêneas

Uma árvore homogênea d-dimensional $\mathbb{T}_d$, $d \geq 2$, é um grafo com infinitos vértices, sem ciclos, conectado e tal que cada vértice tem $d+1$ vizinhos. Identificamos um vértice como sua raiz, denotamos por $\mathbf{0}$. Segue um exemplo para $d = 2$:



Neste caso $p_c(d) = 1/d$.

- Como $\mathbb{T}_d$ é uma árvore, existe um único caminho conectando quaisquer par de vértices u, v. A distância entre esses vértices, denotada por $d(u,v)$, é o número de elos em tal caminho.
- Para cada $v \in V$ denotamos $|v| := d(\mathbf{0}, v)$.
- Para $u, v \in V$, dizemos que $u \leq v$ se u é um dos vértices no caminho que conecta $\mathbf{0}$ com v; $u < v$ se $u \leq v$ e $u \neq v$.
- Dizemos que v é descendente de u se $u \leq v$ e que v é filho de u se $u < v$ e $u \sim v$.
- Para $n \geq 1$ e para qualquer vértice v denotamos $\partial\mathbb{T}^v_{d,n}$ o conjunto de descendentes de v a distância n de v. Isto é, $\partial\mathbb{T}^v_{d,n} = \{w \in \mathbb{T}_d : v \leq w \text{ e } dist(v,w) = n\}$.

O modelo de percolação de elos em $\mathbb{T}_d$ define-se da mesma forma que em $\mathbb{Z}^d$. Usando a mesma notação, vamos provar que:

Teorema 2

Seja $\theta(p,d)$ a probabilidade de percolação em $\mathbb{T}_d$. Para $d \geq 2$,

$$\theta(p,d) > 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad p > \frac{1}{d}.$$

Isto é, $p_c(d) = \dfrac{1}{d}$.

Ideia da prova

Seja $v \sim \mathbf{0}$ e seja $\mathcal{C}_v$ o aglomerado de v sem contar $\mathbf{0}$. Para cada vértice u tal que $v \leq u$ seja

$$Y_u = \text{ número de vértices } w \text{ tais que } w \text{ é filho de } u \text{ e } X_{e(u,w)} = 1.$$

As v.a. Y_u são i.i.d com distribuição comum $Y_u \sim Binomial(d,p)$ e $E(Y_u) = d\,p > 1$ se, e somente se, $p > 1/d$. Logo, se definimos

$$Z_n(v) = \sum_{i=1}^{|\mathbb{T}^v_{d,n}|} \mathbf{1}_i$$

onde $\mathbf{1}_i$ é a v.a. indicadora do evento de que o i-ésimo vértice de $\partial\mathbb{T}^v_{d,n}$ está conectado a v por um caminho de elos abertos, temos que $\{Z_n(v)\}_{n\geq 0}$ é um processo de ramificação com distribuição de descendência $Binomial(d,p)$.

Para finalizar, note que

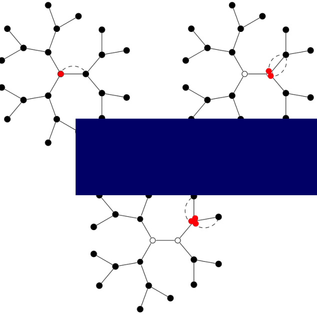
$$\{\mathcal{C}_v = \infty\} \text{ ocorre se, e somente se, o processo } \{Z_n(v)\}_{n\geq 0} \text{ sobrevive,}$$

e que

$$\{|\mathcal{C}| < \infty\} \text{ se, e somente se, } \bigcap_{v\sim\mathbf{0}} \{|\mathcal{C}_v| < \infty\}.$$

Referências

- Luiz Renato G. Fontes. Notas em Percolação. IME-USP. 1996. (Capítulo 1)
- Geoffrey Grimmett. Probability on Graphs. 1st ed. Cambridge. 2010. (Capítulo 3)
- Pablo M. Rodriguez, Modelos probabilísticos, In: Actas del XV Congreso “Dr. Antonio A. R. Monteiro” (2019). (Seção 3.1)
- Rinaldo Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser, 1999. (Capítulo IV)



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org

e-mail: pablo@de.ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza