Aula 16: Esperança

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Esperança matemática: propriedades e exemplos.

Esperança de uma v.a. discreta

A esperança de uma v.a. discreta X, com valores em $\mathcal{S}$ e função de probabilidade $p(x)$, é dada por

$$E(X) := \sum_{x \in \mathcal{S}} x\, p(x) = \sum_{x \in \mathcal{S} : x < 0} x\, p(x) + \sum_{x \in \mathcal{S} : x \geq 0} x\, p(x),$$

... desde que pelo menos uma das somas seja finita. Caso contrário, dizemos que a esperança de X não existe.

Observação!

Note que ambas as somas são finitas se $\sum_{x \in \mathcal{S}} |x|\, p(x) < \infty$.

Observação!

Se X é uma variável aleatória discreta com valores $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i \in \mathbb{R}$, tal que $E(X)$ existe, então $E(X) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.

Exemplo 16.1

Seja X uma variável aleatória tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$

$$P(X = x_i) = \frac{1}{C}\frac{1}{i^2}, \ \textit{onde}\ x_i = (-1)^i\{C\, i^2\}\ \textit{e}\ C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i = \begin{cases} 1, & \textit{se } n \textit{ for ímpar,} \\ 0, & \textit{se } n \textit{ for par.} \end{cases}$$

Isto é, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$ *não existe. Portanto,* $E(X)$ *não existe.*

Lembrete: propriedades

Observação!

No que segue, consideramos variáveis aleatórias tais que sua esperança existe.

1. Se $X = c$ então $E(X) = c$.
2. **Monotonicidade.** Se $X \leq Y$ então $E(X) \leq E(Y)$.
3. **Linearidade.** Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a. e $c_1, \ldots, c_n$ são constantes:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i).$$

Soma de v.a. indicadoras e esperança

Proposição 16.1

Sejam A_1 e A_2 dois eventos aleatórios. Então,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Prova. Para $i \in \{1, 2\}$ defina

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o evento } A_i \text{ ocorrer,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, note que

$$1 - (1 - X_1)(1 - X_2) = \begin{cases} 1, & \text{se o evento } A_1 \cup A_2 \text{ ocorrer,} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e que

$$X_1 X_2 = \begin{cases} 1, & \text{se o evento } A_1 \cap A_2 \text{ ocorrer,} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

... continuação da prova da Prop.16.1. Portanto,

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2) &= E(1-(1-X_1)(1-X_2)) \\
&= E(1-[1-X_1-X_2+X_1X_2]) \\
&= E(X_1)+E(X_2)-E(X_1X_2) \\
&= P(A_1)+P(A_2)-P(A_1 \cap A_2)
\end{aligned}
$$

O problema do pareamento

Suponha que cada uma das n pessoas presentes em uma festa atire seu chapéu para o centro da sala. Os chapéus são misturados e depois cada pessoa seleciona ao acaso um deles. Determine o número esperado de pessoas que seleciona o seu próprio chapéu.

Solução. Considere as variáveis

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a } i\text{-ésima pessoa seleciona o seu próprio chapéu,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se X é o # de pessoas que seleciona o seu próprio chapéu, queremos $E(X)$. Mas

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = 1.$$

Problema da coleção de cupons

Suponha que existem n tipos diferentes de cupons. A cada vez que uma colecionadora recolhe um cupom, esse tem a mesma probabilidade de ser qualquer um dos n tipos. Qual é o número esperado de cupons que precisam ser colecionados até a obtenção de uma coleção completa de pelo menos um cupom de cada tipo?

Dica. Se X é o # de cupons que precisam ser colecionados até a obtenção de uma coleção completa, podemos escrever

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n$$

onde

$$X_i \sim Geom\left(\frac{n - \{i-1\}}{n}\right),$$

para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Problema da coleção de cupons

Por exemplo, considere 4 tipos diferentes de cupons:

$$\underline{\checkmark}\ \overbrace{\underline{\times}\ \underline{\times}\ \underline{\times}\ \underline{\checkmark}}^{X_2}\ \overbrace{\underline{\times}\ \underline{\times}\ \underline{\checkmark}}^{X_3}\ \overbrace{\underline{\times}\ \underline{\checkmark}}^{X_4}$$

cupom novo ($\checkmark$)

cupom repetido ($\times$)

$X_1 = 1$

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

Neste caso: $X_1 = 1$, $X_2 \sim Geom(\frac{3}{4})$, $X_3 \sim Geom(\frac{1}{2})$ e $X_4 \sim Geom(\frac{1}{4})$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} E(X_i) = 1 + \frac{4}{3} + 2 + 4 = \frac{25}{3} \approx 8,33.$$

A esperança como uma integral

Se X é uma variável aleatória com função de distribuição F, então:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

quando a integral imprópria de Riemann-Stieltjes está bem definida.

Observação

Notações: $E(X) = \int x dF_X(x) = \int x P_X(dx) = \int X dP.$

Observação

Se $E(X)$ é finita então dizemos que X é integrável.

Integral de Riemann-Stieltjes

Se φ é continua e definida em $[a, b]$ e F é função de distribuição:

$$\int_a^b \varphi dF = \int_a^b \varphi(x) dF(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i)), \quad (1)$$

onde $a = x_1 < \cdots < x_n = b$ formam uma partição de $[a, b]$, cada $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$ e $\max_i\{x_{i+1} - x_i\} \to 0$ se $n \to \infty$. Além disto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x) := \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b \varphi(x) dF(x),$$

desde que o limite existe.

Observação

Se φ não é continua o limite (1) pode não existir. Isto pode é resolvido usando a integral de Lebesgue-Stieltjes (mas coincidem quando φ é continua em $[a, b]$).

- se X é discreta com valores em $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{S}$ enumerável, então

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x) := \sum_{y \in [a,b] \cap \mathcal{S}} \varphi(y)P(X = y).$$

De fato, para n suficientemente grande e $a = x_1 < \cdots < x_n = b$ tais que $|\mathcal{S} \cap (x_i, x_{i+1})| \in \{0, 1\}$, temos que

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = \begin{cases} P(X = y_i), & \text{se } y_i := \mathcal{S} \cap (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & \text{se } \mathcal{S} \cap (x_i, x_{i+1}) = \emptyset. \end{cases}$$

Então

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i)) = \sum_{i: y_i \in \mathcal{S} \cap [a,b]} \varphi(y_i)P(X = y_i).$$

- se X é absolutamente continua com densidade f, então

$$\int_a^b \varphi(x)\,dF(x) := \int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx.$$

De fato, para n suficientemente grande e $a = x_1 < \cdots < x_n = b$ temos que

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = P(X \in (x_i, x_{i+1})) \approx f(y_i)(x_{i+1} - x_i)$$

para $y_i \in (x_i, x_{i+1})$. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i)) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)f(y_i)(x_{i+1} - x_i) \\
&= \int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Bom estudo!