Lista 0 (Revisão de Probabilidade)
ET658 - Processos Estocásticos
Prof. Pablo Martín Rodríguez

Para revisar os conceitos aprendidos sobre Teoria das Probabilidades consultar os livros:

- Dantas, C. A. B. Probabilidade: Um curso introdutório, 2a Ed., Edusp, 2004.
- Ross, S. M. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a Ed., Bookman, 2010.

---

1. Sejam A e B eventos tais que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Calcular: $P(A \cup B)$; $P(A^c)$; $P(B^c)$; $P(B^c)$; $P(A \cap B^c)$; $P(A^c \cap B)$; $P(A^c \cap B^c)$; $P(A^c \cup B^c)$.

2. Um sistema é formado por 5 componentes; cada um deles ou está funcionando ou está estragado. Considere um experimento que consiste em observar a condição de cada componente e represente o resultado do experimento como o vetor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, onde x_i é igual a 1 se o componente i estiver funcionando e igual a 0 se o componente i estiver estragado.
   (a) Existem quantos resultados no espaço amostral deste experimento?
   (b) Suponha que o sistema irá funcionar se os componentes 1 e 2 estiverem funcionando, ou se os componentes 3 e 4 estiverem funcionando, ou se os componentes $1, 3$ e 5 estiverem funcionando. Seja W o evento em que o sistema irá funcionar. Especifique todos os resultados de W.
   (c) Seja A o evento em que os componentes 4 e 5 estão estragados. Quantos resultados estão contidos no evento A?
   (d) Escreva todos os resultados no evento $A \cap W$.

3. Uma moeda é lançada duas vezes. Qual é a probabilidade condicional de ter duas caras, dado que o primeiro resultado é cara? E dado que pelo menos um dos lançamentos é cara?

4. Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ele sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece, dá a resposta correta, nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele sabia a resposta?

5. Dois dados honestos são rolados.
   (a) qual é a probabilidade de que a soma das faces para cima seja igual a i? Determine essa probabilidade para $i = 2, 3, \ldots, 11, 12$.
   (b) qual é a probabilidade condicional de que o primeiro caia no 6 se a soma dos dados é i? Calcule essa probabilidade para todos os possíveis valores de i entre 2 e 12.

6. Consideremos uma urna com 8 bolas vermelhas e 4 bolas brancas. Duas bolas são retiradas da urna, uma após a outra sem reposição. Qual é a probabilidade de que as duas bolas sejam vermelhas?

7. Temos duas urnas A e B com as seguintes composições. A urna A contem 3 bolas brancas e 4 bolas vermelhas e a urna B contem 2 bolas brancas e 5 bolas vermelhas. Escolhemos uma das duas urnas de acordo com as seguintes probabilidades: urna A com probabilidade $1/3$ e urna B com probabilidade $2/3$. Se uma bola é retirada da urna selecionada qual a probabilidade da bola escolhida ser branca? Dado que a bola escolhida é branca qual a probabilidade dela ter sido escolhida da urna A?

8. Se A e B são eventos independentes tais que $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 1/2$. Calcule $P(A \cup B)$, $P(A^c \cup B^c)$ e $P(A^c \cap B)$.

9. Um exame de laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma doença quando essa doença existe de fato. Entretanto o teste aponta um resultado "falso positivo" para 1% das pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o seu exame foi positivo?

10. Seja $A \subset B$. Expresse as seguintes probabilidades da forma mais simples possível: $P(A|B)$, $P(A|B^c)$, $P(B|A)$, $P(B|A^c)$.

11. Um sistema paralelo funciona sempre que pelo menos um de seus componentes funcione. Considere um sistema paralelo de n componentes, e suponha que cada componente trabalhe independentemente com probabilidade $1/2$. Determine a probabilidade condicional de que o componente 1 funcione dado que o sistema está funcionando.

12. Suponha que temos 4 moedas tais que, se a i-ésima moeda for jogada, a probabilidade dela dar cara é igual a $i/4$, $i = 1, 2, 3, 4$. Quando uma das moedas é selecionada aleatoriamente e jogada, ela dá cara. Qual é a probabilidade condicional de que tenha sido a segunda moeda?

13. Considere uma variável aleatória discreta T cuja distribuição de probabilidade é apresentada a seguir:

Valores de T :	2	3	4	5	6	7
Probabilidades:	1/10	1/10	4/10	2/10	1/10	1/10

Determine: (a) $P(T \geq 6)$; (b) $P(|T - 4| \geq 2)$; (c) $P(T$ ser um número primo).

14. Lançamos um dado sucessivamente sobre uma superficie plana e observamos a variável aleatória X que indica o número de lançamento em que ocorre 6 pela primeira vez. Determine a distribuição de probabilidades de X.

15. Suponha que uma variável aleatória discreta tenha a seguinte distribuição de probabilidades: $P(X = x) = cx$ para $x \in \{1, 2, \ldots, N\}$ e zero fora desse conjunto. Determine:
    (a) O valor da constante c quando $N = 4$.
    (b) O valor de c para um valor qualquer de N.
    (c) $P(X \leq a)$, onde $a \leq N$.
    (d) $P(X$ ser par).

16. Quantas vezes você espera rolar um dado honesto até que todos os lados ímpares tenham aparecido pelo menos uma vez?

17. Suponha que o número de erros tipográficos em uma única página de um livro tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = \frac{1}{2}$.
    (a) Calcule a probabilidade de existir exatamente dois erros tipográficos em uma página.
    (b) Calcule a probabilidade de que exista pelo menos um erro em uma página.
    (c) Suponha agora que o livro em questão possui 200 páginas. Qual é a probabilidade de não existir erros tipográficos neste livro?

18. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias exponenciais independentes com parâmetro comum λ. Determine $P(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \leq a)$, onde $a > 0$ é uma constante.

19. Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x) = cx^2$ para $-1 \leq x \leq 1$ e $f(x) = 0$ caso contrário.
    (a) Determine o valor da constante c.
    (b) Calcule $P(|X| > 1/2)$.

20. Dizemos que uma variável aleatória tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua densidade é dada por: $f(x) = cx$ para $0 \leq x \leq 1/2$, $f(x) = c(1-x)$ para $1/2 < x < 1$, e $f(x) = 0$ para os demais valores de x.

    (a) Determine o valor da constante c.

    (b) Esboce o gráfico de $f(x)$.

    (c) Calcule $P(X > 8/10)$ e $P(1/4 < X < 3/4)$.

21. Se X é uniformemente distribuída no intervalo $(0, 20)$, calcule $P(X < 3)$, $P(4 < X < 15)$ e $P(|X-3| < 4)$.

22. Seja X uma variável aleatória com distribuição $N(10, 100)$. Calcule $P(X > 20)$ e $P(15 < X < 25)$.

23. O tempo de vida, em horas, de uma válvula de rádio é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por $f(x) = 0$ se $x \leq 100$ e $f(x) = 100/x^2$ se $x > 100$. Qual é a probabilidade de que exatamente 2 de 5 válvulas no circuito de um aparelho de rádio tenham que ser trocadas nas primeiras 150 horas de operação? Suponha que os eventos E_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, em que a i-ésima válvula tem que ser substituída dentro deste intervalo de tempo sejam independentes.

24. Suponha que o número de acidentes que ocorrem em uma rodovia em cada dia seja uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 3$.

    (a) Determine a probabilidade de que 3 ou mais acidentes ocorram hoje.

    (b) Repita o item anterior supondo que pelo menos 1 acidente ocorra hoje.

25. O número de tempestades de inverno em um ano bom é uma variável aleatória de Poisson com média 3, enquanto o número em um ano ruim é uma variável de Poisson com média 5. Se o próximo ano tem probabilidades $0,4$ de ser um ano bom e $0,6$ de ser um ano ruim, determine o valor esperado e a variância do número de tempestades no próximo ano.

26. O número de anos que um rádio funciona é exponencialmente distribuído com $\lambda = 1/8$. Se compramos um rádio usado, qual é a probabilidade de que ele funcione por mais 8 anos?

27. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$. Determine a função densidade de probabilidades da variável aleatória $Y = e^X$.

28. Suponha que o número de clientes que entram em um banco em determinada hora seja uma variável aleatória de Poisson de parâmetro 40. Suponha ainda que as quantias de dinheiro retiradas por esses clientes sejam variáveis aleatórias independentes com média comum de R$ 120. Supondo que a quantia retirada por um cliente seja independente do número total de clientes que entram no banco, determine a quantidade esperada de dinheiro retirado do banco em uma dada hora.

29. Seja X uma variável aleatória com distribuição Bernoulli de parâmetro $1/3$. Calcule $E(100^X - 1)$.

30. Um teste é realizado com 100 itens funcionando simultaneamente. Suponha que os tempos de vida individuais são variáveis aleatórias exponenciais independentes com média 200 horas. O teste é finalizado quando ocorrem 5 falhas. Se T é o tempo de duração do teste, encontre $E(T)$.