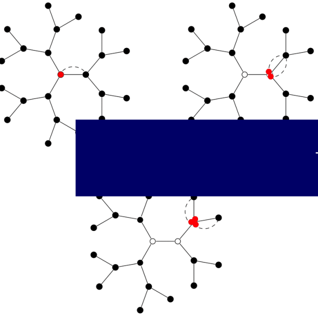
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 18

- Variáveis aleatórias discretas.

Variáveis aleatórias discretas

X é uma v.a. discreta se o conjunto de valores assumidos por X pode ser enumerado como $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ ou $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Exemplo 18.1

- *O número de lançamentos de um dado honesto sobre uma superfície plana que devem ser realizados até que um número menor que 4 seja observado na face superior;*
- *O número de filhas de uma família escolhida ao acaso na cidade de Recife para a realização de uma pesquisa;*
- *O número de dias com chuva na cidade de João Pessoa em um período de um ano.*

Função de probabilidade

Se X é uma v.a. discreta tomando valores no conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ou no conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ então:

$$\{X = x_i\}$$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots\}$ é um evento. De fato, lembre que

$$\{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}.$$

Portanto podemos calcular sua probabilidade:

$$P(X = x_i)$$

e esta probabilidade é denotada por $p(x_i)$.

Exemplo

Realize o lançamento de uma moeda viciada que tem probabilidade 3/4 de dar cara. Seja:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{quando o resultado é cara,} \\ 0 & \text{quando o resultado é coroa.} \end{cases}$$

então sua função de probabilidade é dada por:

$$p(1) = P(X = 1) = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad p(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}.$$

Indicadoras

Dado um evento qualquer A, uma variável aleatória I_A definida como:

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{se o evento } A \text{ ocorrer,} \\ 0 & \text{se o evento } A^c \text{ ocorrer,} \end{cases}$$

chama-se variável aleatória indicadora do evento A. Neste caso:

$$P(I_A = 1) = P(A) \qquad \text{e} \qquad P(I_A = 0) = P(A^c) = 1 - P(A).$$

Função de probabilidade

Se X é uma variável aleatória discreta definimos a função de probabilidade $p(a)$ de X como:

$$p(a) = P(X = a).$$

Propriedades

- $p(a)$ é positiva para no máximo um número contável de valores de a. De fato, se X toma valores no conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ então:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= P(X = x_i) \geq 0, \text{ para } i \in \{1, 2, \ldots\}; \\ p(a) &= P(X = a) = 0, \text{ para todo } a \neq x_i, \text{ com } i \in \{1, 2, \ldots\}. \end{aligned}$$

- Sempre vale que $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$. De fato, se X toma valores em $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ então:

$$\text{Como } \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\} = \Omega$$

temos que:

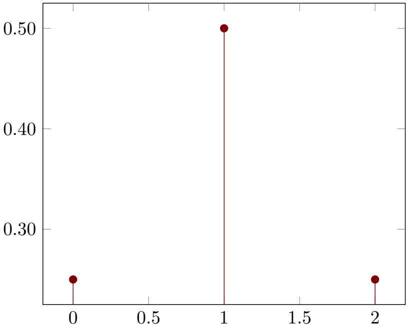
$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i).$$

Representação

A função de probabilidade é representada em um gráfico desenhando $p(x_i)$ no eixo y em função de x_i no eixo x.

Exemplo 18.2

Se X tem função de probabilidade dada por $p(0) = 0,25$, $p(1) = 0,5$ e $p(2) = 0,25$ então:



Exemplo 18.3

Uma loja online distribui 10 *tipos distintos de cupons de desconto para seus clientes. Uma pessoa, tentando conseguir descontos em alguns itens específicos, começa a recolher cupons com amigos e conhecidos, até conseguir cupons dos tipos* 1 *ou* 3*. Suponha que, independentemente dos tipos já recolhidos, cada novo cupom obtido tenha a mesma probabilidade de ser de qualquer tipo. Se* X *denota o número de cupons recolhidos, determine a função de probabilidade de* X*.*

Solução. Note que X toma valores no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Por outro lado, para cada i considere o evento

$$A_i = \text{“o } i - \text{ésimo cupom recolhido é do tipo 1 ou do tipo 3.”}$$

Note que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots\}$ vale que

$$P(A_i) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

... e que os eventos A_i são independentes entre si.

... continuação do Exemplo ??. Como

$$\{X = i\} = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i$$

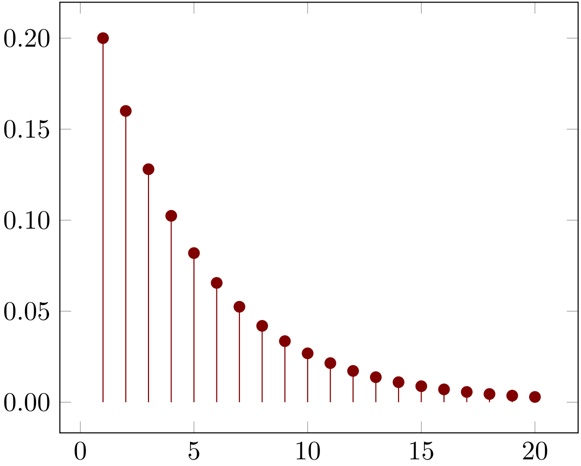
então

$$\begin{aligned} P(X = i) &= P\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i\right) \\ &= P\left(A_1^c\right) \times P\left(A_2^c\right) \times \cdots \times P\left(A_{i-1}^c\right) \times P\left(A_i\right) \end{aligned}$$

e portanto

$$p(i) = \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) \times \cdots \times \left(\frac{4}{5}\right)}_{i-1 \text{ vezes}} \times \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{5}\right).$$

Ilustração da $p(i)$ do exemplo anterior!



Exemplo 18.4

A função de probabilidade de uma variável aleatória X é dada por

$$p(i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i \in \{0, 1, 2\ldots\}$$

onde λ é algum valor positivo. Determine: (a) $P(X = 0)$ e (b) $P(X > 2)$.

Solução. O primeiro que deve ser observado é que a função de probabilidade de X está dependendo de duas constantes: c e λ. Para que esta função de fato seja uma probabilidade deve ser $c \geq 0$. Vamos verificar se existe alguma outra restrição para estas constantes. Como

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$$

temos que $c\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = 1$ mas sabemos que $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda}$ e portanto:

... deve ser $c = e^{-\lambda}$.

... continuação do Exemplo ??. Acabamos de verificar que

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

e que não há restrições adicionais para λ (parâmetro da distribuição).

(a) Note que $P(X = 0) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$.

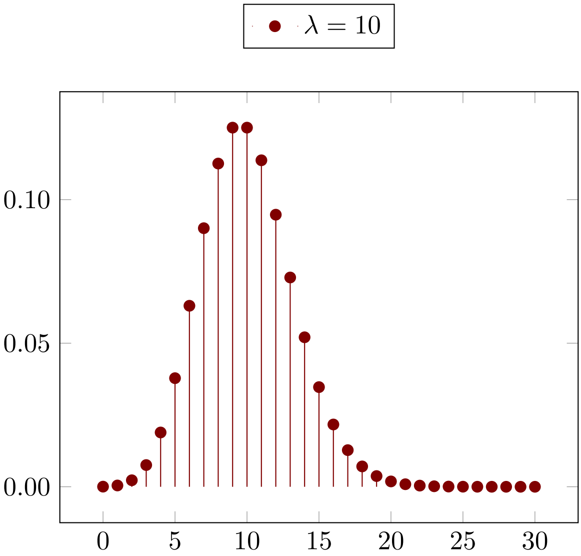
(b) Note que $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$ e como

$$\{X \leq 2\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\},$$

temos que
$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \\ &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto $P(X > 2) = 1 - e^{-\lambda}\left(2 + \dfrac{\lambda^2}{2}\right)$.

Ilustração da $p(i)$ do exemplo anterior!



Função de distribuição

A função de distribuição F de uma variável aleatória discreta X pode ser escrita em termos de $p(a)$:

$$F(a) = P(X \leq a) = \sum_{\text{todo } x \leq a} p(x).$$

Se X é discreta com possíveis valores $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, com $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, então F de X é uma função degrau ou escada. Isto é, a função F é constante em intervalos $[x_{i-1}, x_i)$ e então dá um salto de tamanho $p(x_i)$ em x_i.

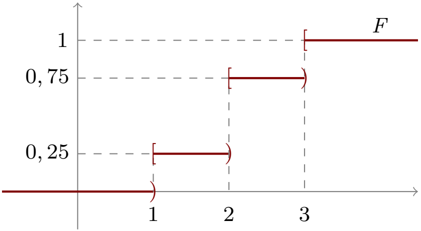
Exemplo 18.5

Se X tem função de probabilidade dada por

$$p(1) = 0,25 \qquad p(2) = 0,5 \qquad p(3) = 0,25$$

então sua função de distribuição é dada por:

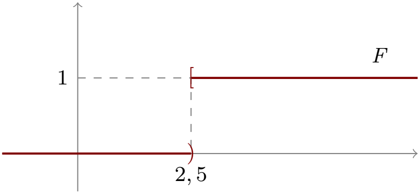
$$F(a) = \begin{cases} 0 & se \ a < 1 \\ 0,25 & se \ 1 \leq a < 2 \\ 0,75 & se \ 2 \leq a < 3 \\ 1 & se \ a \geq 3. \end{cases}$$



Outros exemplos

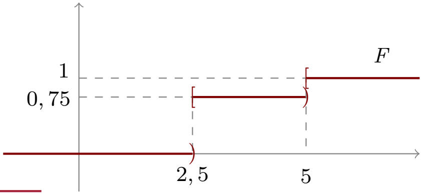
Lembre que a partir de $F(a)$ podemos descobrir $p(a)$!

1.



Neste caso $P(X = 2,5) = 1$.

2.



Neste caso $P(X = 2,5) = 0,75$ e $P(X = 5) = 0,25$.

Exemplo 18.6

Seja X uma variável aleatória discreta com:

$$F(a) = \begin{cases} 0 & se\ a < 0 \\ 0,25 & se\ 0 \leq a < 2,5 \\ 0,5 & se\ 2,5 \leq a < 3 \\ 0,9 & se\ 3 \leq a < 5 \\ 1 & se\ a \geq 5. \end{cases}$$

Encontre $p(a)$ de X e calcule $P(2 \leq X \leq 4)$ e $P(X > 1,5)$.

Solução. Note que:

$$p(0) = 0,25 \qquad p(2,5) = 0,25 \qquad p(3) = 0,4 \qquad p(5) = 0,1.$$

- $P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2,5) + P(X = 3) = 0,25 + 0,4 = 0,65,$
- $P(X > 1,5) = 1 - P(X \leq 1,5) = 1 - 0,25 = 0,75.$

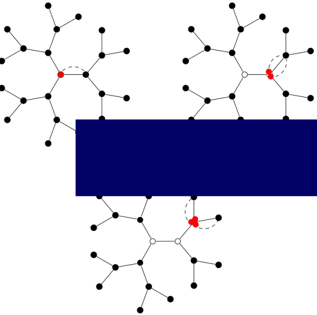
Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 4 (Ross): 4.17, 4.18, 4.19 (pág. 216 e 217).

Entregar a resolução destes exercícios na segunda-feira 16/08!



Bom estudo!