Lista de exercícios 9
PGE950 - Probabilidade | PPGE - UFPE
Prof. Pablo M. Rodriguez
1° Semestre de 2020

Exercícios:

1. Sejam X e Y v. a. independentes, tomando valores em $\mathbb{Z}$ e com f. p. dada por $p_X(i)$ e $p_Y(i)$, respectivamente. Mostre que
$$P(X+Y=i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k)p_Y(i-k),$$
para $i \in \mathbb{Z}$.

2. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim B(n_i, p)$, para $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Mostre que
$$\sum_{i=1}^{k} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right).$$

3. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$, para $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Mostre que
$$\sum_{i=1}^{k} X_i \sim Poisson\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right).$$

4. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_r$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim Geom(p)$, para $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Mostre que
$$\sum_{i=1}^{r} X_i \sim BN\left(p, r\right).$$

5. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim Gama(t_i, \lambda)$, para $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Mostre que
$$\sum_{i=1}^{k} X_i \sim Gama\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, \lambda\right).$$

6. Seja $x \in [0,1]$. Mostre que $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}\, dy = \frac{x^n}{n!}$.

7. **Distribuição de Rayleigh de parâmetro** 1. Sejam X e Y i.i.d. com $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Mostre que $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$ tem densidade dada por $f_Z(z) = ze^{-z^2/2}$, se $z \geq 0$ e $f_Z(z) = 0$, caso contrário.

8. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Mostre que
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

ENTREGAR

os exercícios 1, 4 *e* 8 *por e-mail ou por WhatsApp, escrito à mão, até o dia 14/08.*