

Lista de exercícios 4

PGE950 - Probabilidade | PPGE - UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

1° Semestre de 2020

No que segue (Ω, \mathcal{F}, P) denota um espaço de probabilidade. Isto é, Ω é um conjunto não-vazio, \mathcal{F} é a σ -álgebra de subconjuntos de Ω e P é uma probabilidade em \mathcal{F} .

Exercícios:

1. Seja A_1, A_2, \dots, A_n uma partição de Ω . Mostre que $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$, para todo $B \in \mathcal{F}$.

2. Dados $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ mostre que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

3. Uma moeda é lançada três vezes. Considere os seguintes eventos:

A = “o primeiro lançamento resulta em cara”.

B = “o segundo lançamento resulta em corõa”.

C = “o terceiro lançamento resulta em cara”.

D = “os três lançamentos dão o mesmo resultado” (isto é, CCC ou \overline{CCC}).

E = “exatamente um lançamento resulta em cara”.

(a) Quais dos seguintes pares de eventos são independentes?

i. A, B .

ii. A, D .

iii. A, E .

iv. D, E .

(b) Quais das seguintes triplas de eventos são independentes?

i. A, B, C .

ii. A, B, D .

iii. C, D, E .

4. Uma moeda é lançada duas vezes. Considere os seguintes eventos:

A = “o primeiro lançamento resulta em cara”.

B = “o segundo lançamento resulta em cara”.

C = “os dois lançamentos dão o mesmo resultado”.

(a) Mostre que A, B, C são independentes 2 a 2 mas não são independentes.

(b) Mostre que C é independente de A e B mas não de $A \setminus B$.

5. Suponha que A e B são tais que $P(A|B) = P(B|A)$, $P(A \cup B) = 1$ e $P(A \cap B) > 0$. Prove que $P(A) > 1/2$.

6. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de eventos mutuamente exclusivos e para $B \in \mathcal{F}$ vale que $P(B|A_n) \geq c$ para todo n , em que $c > 0$ é uma constante, mostre que

$$P\left(B \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq c.$$

7. Sejam A_1, \dots, A_n eventos independentes com $p_i := P(A_i)$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Obtenha a probabilidade de ocorrência dos seguintes eventos em função das p_i .

(a) A ocorrência de pelo menos um dos A_i .

(b) A ocorrência de exatamente dois dos A_i .

(c) A ocorrência de, no máximo, $n - 1$ dos A_i .