Lista de exercícios 1
PGE950 - Probabilidade | PPGE - UFPE
Prof. Pablo M. Rodriguez
1° Semestre de 2020

Primeiros exercícios. Realize os exercícios 1 e 2, página 26, de Exercícios de Probabilidade de Lebensztayn (livro disponível em `https://www.ime.unicamp.br/~lebensztayn/livro/livro.html`).

No que segue $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ denota um espaço de probabilidade. Isto é, Ω é um conjunto não-vazio, $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra de subconjuntos de Ω e P é uma probabilidade em $\mathcal{F}$.

Prove as seguinte propriedades:

1. Se $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ então $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

2. Se $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

3. (Fórmula de inclusão-exclusão) Se $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

   Dica: Prove por indução em n.

4. (σ-subaditividade) Se $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

5. Se $A_n \searrow$ é uma sequência de eventos aleatórios então

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

6. Se $P(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$.

7. Se $P(A_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $P\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$.

8. (a) Se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são duas σ-álgebras em Ω então $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ também é uma σ-álgebra em Ω.
   (b) Generalize o item anterior para n σ-álgebras em Ω.
   (c) Se $\mathcal{C}$ é uma classe de subconjuntos de Ω mostre que existe pelo menos uma σ-álgebra que contém $\mathcal{C}$.
   (d) Seja $\mathcal{C}$ é uma classe de subconjuntos de Ω. Como você definiria "a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{C}$?

ENTREGAR

os exercícios $2, 4, 6, 7$ *e* 8 *por e-mail ou por WhatsApp, escrito à mão, até o dia 12/06.*