Material - Aula 4
PGE950 - Probabilidade | PPGE - UFPE
Prof. Pablo M. Rodriguez
1° Semestre de 2020

No que segue $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ denota um espaço de probabilidade. Isto é, Ω é um conjunto não-vazio, $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra de subconjuntos de Ω e P é uma probabilidade em $\mathcal{F}$.

1 Exercícios: probabilidade e probabilidade condicional

1. Seja $A \in F$ e $B \in F$. Mostre que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

   Solução: Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ou, reescrevendo,
   $$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$
   Como $P(A \cup B) \leq 1$ temos que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

2. Considere a sequência de eventos aleatórios $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$. Mostre que, se $B \in \mathcal{F}$ é tal que $P(B|A_n) \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então
   $$P\left(B \Big| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq c.$$

   Solução:
   $$P\left(B \Big| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(B \cap \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{B \cap A_n\}\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)},$$
   mas $\dfrac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{B \cap A_n\}\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B \cap A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}$. O fato de $P(B|A_n) \geq c$ garante que
   $$P\left(B | \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \geq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c\, P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = c.$$

3. Considere n eventos aleatórios $A_1 \dots, A_n$.

   (a) Mostre que $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c)$.

   Solução: De fato, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)$ e como

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c),$$

concluímos o resultado.

(b) Mostre que, se $P(A_k) \geq 1-\epsilon$ para todo $k \in \{1,\ldots,n\}$ então

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1-n\epsilon.$$

Solução: É suficiente observar que $P(A_k^c) \leq \epsilon$ e aplicar o item anterior:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1-\sum_{k=1}^{n} P(A_k^c) \geq 1-\sum_{k=1}^{n} \epsilon = 1-n\epsilon.$$

4. Considere uma sequência de eventos aleatórios $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_n \searrow$ e $P(A_{n+1}|A_n) \leq 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Solução: Note que

$$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{P(A_{n+1}\cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)},$$

então $P(A_{n+1}|A_n) \leq 1/2$ implica que

$$\frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} \leq \frac{1}{2},$$

ou $P(A_{n+1}) \leq (1/2)P(A_n)$, que vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas

$$0 \leq P(A_{n+1}) \leq \frac{1}{2}P(A_n) \leq \frac{1}{2^2}P(A_{n-1}) \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}P(A_1) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Então, $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty}(1/2^{n-1}) = 0$.

5. Considere a sequência de eventos aleatórios $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Se $B \in \mathcal{F}$ e $C \in \mathcal{F}$ são tais que $P(B|A_n) = P(C|A_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que:

$$P\left(B\Big|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(C\Big|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

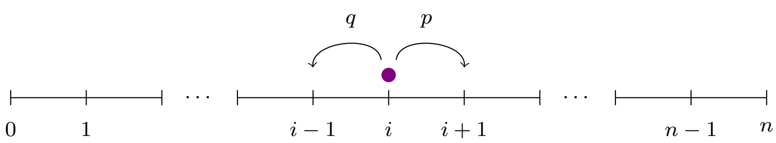
Solução: Note que

$$P\left(B\Big|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P\left(C\Big|A_n\right)P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P\left(C\Big|A_n\right)P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = P\left(C\Big|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

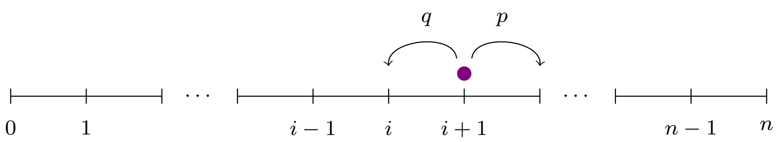
2 Outra forma de pensar o Problema da Ruína do Jogador

Problema da ruína do jogador. Dois jogadores, A e B, apostam aos sucessivos lançamentos independentes de uma moeda, com probabilidade p de dar cara, $p \in (0,1)$. Após cada lançamento A ganha $R\$1,00$ de B se der cara, ou B ganha $R\$1,00$ de A se der coroa. Supondo que há em jogo n reais, A inicia com i e B inicia com $n-i$: qual é a probabilidade de A vencer o jogo?

Suponha que a fortuna do jogador A é representada por una partícula posicionada no intervalo discreto $[\![0,n]\!]$. Para cada aposta em que A ganha, a partícula pula um passo à direita; enquanto que para cada aposta em que A perde, o pulo é para a esquerda. Em outras palavras, em cada "instante discreto de tempo", a partícula pula um passo à direita com probabilidade p ou à esquerda com probabilidade $1-p$, com $p \in (0,1)$ (ver Figura 1). Os saltos são independentes entre si.



(a) A partícula inicia no vertice i.



(b) Se o primeiro lançamento resulta em cara a partícula pula para o vértice $i+1$.

Figura 1: Representação do Problema da Ruína do Jogador como um passeio aleatório em $[\![0,n]\!]$.

Observe que o evento $A_i =$"o jogador A vence o jogo" pode ser interpretado, no contexto da partícula, como $A_i =$ "{a partícula atinge o vértice n antes de atingir o vértice 0". Lembre que

$$P(A_i) = \begin{cases} \dfrac{1-(\{1-p\}/p)^i}{1-(\{1-p\}/p)^n}, & \text{si } p \neq 1/2, \\[2ex] i/n, & \text{si } p = 1/2, \end{cases}$$

em que i representa a hipótese de A iniciar com i reais. Suponha agora que $i = 1$ (por simplicidade) e que A está jogando com um oponente rico. Podemos interpretar o problema supondo que a fortuna do jogador A é representada por una partícula posicionada nos inteiros não-negativos $\mathbb{Z}^+$. Como antes, para cada aposta em que A ganha a partícula pula um passo à direita, enquanto que para cada aposta em que A perde o pulo é para a esquerda. Em outras palavras, a partícula pula um passo à direita com probabilidade p ou à esquerda com probabilidade $1-p$ (ver Figura 2). Os saltos são independentes entre si.

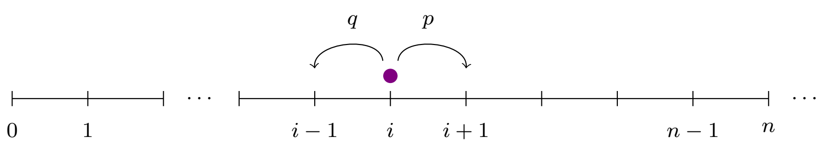


Figura 2: Representação do Problema da Ruína do Jogador como um passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$ (oponente rico).

Para esse problema, vamos encontrar a probabilidade de que dado que começa com $R\$1$ o jogador A vence o jogo. Isto é equivalente ao evento que a partícula nunca atinge o 0. Para isto definimos os eventos:

$$B(n) = \{\text{saindo de 1 a partícula alcanza o vértice } n \text{ antes que o vértice } 0\},$$

para $n \geq 2$. A sequência $(B(n))_{n\geq 2}$ é tal que

$$B(n+1) \subset B(n),$$

para todo $n \geq 2$. Isto é, $B(n) \searrow$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B(n)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{\infty} B(n)\right). \tag{1}$$

Note que

$$\bigcap_{n=2}^{\infty} B(n)$$

é o evento de interesse. Como

$$\mathbb{P}\left(B(n)\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) = \begin{cases} \dfrac{1-(1-p)/p}{1-((1-p)/p)^n}, & \text{si } p \neq 1/2, \\ 1/n, & \text{si } p = 1/2. \end{cases}$$

temos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B(n)) = \begin{cases} 1-(1-p)/p, & \text{si } p > 1/2, \\ 0, & \text{si } p \leq 1/2. \end{cases} \tag{2}$$

Portanto, A vence o jogo se, e somente se, $p > 1/2$.