ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 16

- Variáveis Aleatórias.

Motivação

Considere o experimento de lançar dois dados honestos. Existem diversas quantidades associadas à um experimento como esse que podem ser de interesse. Defina, por exemplo:

- $X_1 =$ valor observado no primeiro dado;
- $X_2 =$ valor observado no segundo dado;
- $X =$ soma dos valores observados;
- $Y =$ maior valor observado.

Como $X = 3$ se obtivermos $(1, 2)$ ou $(2, 1)$ como resultados, temos que:

$$P(X = 3) = 2/36.$$

Da mesma forma, $Y = 3$ sempre que o resultado for

$$(1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2) \text{ ou } (3, 3).$$

Logo $P(Y = 3) = 5/36$.

Motivação

Vemos assim que X_1, X_2, X e Y assumem valores distintos com diferentes probabilidades e, por essa razão, serão chamadas de variáveis aleatórias.

É importante observar que a cada valor assumido pela variável aleatória existem diversos resultados associados, formando um evento. Assim $X_1 = 2$ representa o evento onde o primeiro lançamento foi igual a 2. Ou seja,

$$\{X_1 = 2\} = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}.$$

Do mesmo modo podemos dizer que

$$\{X_2 = 4\} = \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4)\},$$

$$\{X \geq 10\} = \{(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

$$\{Y < 3\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

Motivação

Note que cada variável aleatória associa a cada resultado do espaço amostral um valor real.

Por exemplo, X_1 associa ao resultado $(2, 6)$ o valor 2, e ao resultado $(4, 3)$ o valor 4. Isto é, X_1 é uma função que associa para cada elemento de Ω um número real.

Deste modo teríamos $X_1(2, 6) = 2$, enquanto $X_1(3, 1) = 3$.

Desta forma, podemos escrever os eventos associados à X_1, por exemplo, como

$$\{X_1 = 3\} = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = 3\}$$

ou ainda

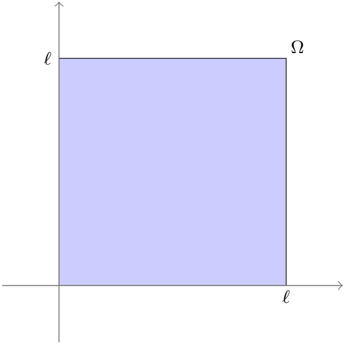
$$\{X_1 > 3\} = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) > 3\}.$$

Em geral, para $A \subset \mathbb{R}$, escrevemos

$$\{X_1 \in A\} = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \in A\}$$

Motivação

Escolha ao acaso um ponto do quadrado de lado ℓ.



$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, \ell]\}.$$

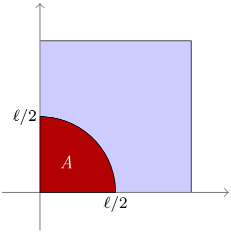
- Se D =“distância entre o ponto escolhido e a origem” e

$$A = \{D \leq \ell/2\},$$

então:

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \ell/2\right\}.$$

Isto é:



Logo:

$$P(D \leq \ell/2) = P(A) = \frac{\#\ \text{área de } A}{\#\ \text{área de } \Omega}.$$

Isto é, $P(A) = \pi/16$.

Definição de Variável Aleatória

Dado um experimento aleatório com espaço amostral Ω, uma variável aleatória X é uma função

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

que associa a cada resultado $\omega \in \Omega$ um valor real $X(\omega)$.

Notação

Usualmente as variáveis aleatórias são representadas pelas letras maiúsculas: X, Y, Z, T etc; e abreviamos "variável aleatória" como: v.a.

Exemplo 16.1

Considere o experimento de lançar 3 *moedas honestas. Seja* N *o total de caras encontradas. Calcule* $P(N = k)$ *para cada* $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Solução. O espaço amostral deste experimento é dado por

$$\Omega = \{(m_1, m_2, m_3) : m_i \in \{C, \overline{C}\}, i \in \{1, 2, 3\}\},$$

então $|\Omega| = 8$. Note que:

$$\begin{aligned}
\{N = 0\} &= \{(\overline{C}, \overline{C}, \overline{C})\}; \\
\{N = 1\} &= \{(C, \overline{C}, \overline{C}), (\overline{C}, C, \overline{C}), (\overline{C}, \overline{C}, C)\}; \\
\{N = 2\} &= \{(C, C, \overline{C}), (C, \overline{C}, C), (\overline{C}, C, C)\}; \\
\{N = 3\} &= \{(C, C, C)\}.
\end{aligned}$$

Portanto: $P(N = 0) = \frac{1}{8}$, $P(N = 1) = \frac{3}{8}$, $P(N = 2) = \frac{3}{8}$ e $P(N = 3) = \frac{1}{8}$.

Exemplo 16.2

Considere o experimento aleatório de lançar um dado honesto. Repetições independentes deste experimento são realizadas até que o número 6 seja observado pela primeira vez. Chame de X o total de lançamentos realizados e calcule $P(X = k)$ para $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Solução: Considere o eventos

$$A_k = \text{"o } k - \text{ésimo lançamento foi diferente de 6"},$$

para $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ e note que, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ são independentes.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \{N = 1\} &= A_1^c; \\ \{N = 2\} &= A_1 \cap A_2^c; \\ \{N = 3\} &= A_1 \cap A_2 \cap A_3^c; \end{aligned}$$

e, em geral: $\{N = k\} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k^c$.

Segue que, para cada k:

$$\begin{aligned} P(N=k) &= P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k^c\right) \\ &= P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{k-1})P(A_k^c) \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Isto é:

$$P(N=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}, \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Classificação de variáveis aleatórias

Para simplificar o estudo, variáveis aleatórias são classificadas em dois grandes grupos.

- Variáveis aleatórias discretas: são variáveis que assumem valores em um conjunto finito ou enumerável. Isto é, X é uma v.a. discreta se o conjunto de valores assumidos por X pode ser enumerado como:

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \text{ ou } \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

- Variáveis aleatórias contínuas: estas variáveis assumem quaisquer valores em um intervalo dos reais. Isto é, se X é uma v.a. contínua, então o conjunto de valores assumidos por X é do tipo

$$\mathbb{R} \text{ ou } [a, b] \text{ ou } [a, +\infty) \text{ etc.}$$

Exemplos de v.a. discretas

- Quando lançamos uma moeda n vezes, a variável N que conta o total de vezes que observamos coroa, é uma v.a. discreta;
- No experimento de monitorar todas as solicitações de chamadas que passam por uma torre de celular, a variável X que conta o total destas chamadas é uma v.a. discreta;
- Repetimos um certo experimento até que um evento A seja observado. A variável Z que conta quantas repetições foram realizadas é uma v.a. discreta.
- Lançamos um dado 5 vezes. Se Y é a soma dos resultados obtidos, então Y é uma v.a discreta.

Exemplos de v.a. contínuas

- Considere o experimento de ligar uma lâmpada e medir a duração desta até que apague sozinha. A variável T que mede o tempo de vida da lâmpada é uma v.a. contínua;
- Lançamos um dardo em um alvo circular. A variável R que mede a distância do dardo ao centro do alvo é uma v.a. contínua;
- Lançamos uma vareta em um chão de madeira com tábuas longas e finas, montadas paralelamente uma a outra. A variável Z que mede o ângulo entre a vareta e a direção das tábuas, é uma v.a. contínua.

Importante

Nem toda variável aleatória pode ser classificada como discreta ou contínua. Algumas são de fato uma combinação destes dois tipos. No entanto, grande parte das variáveis que aparecem em aplicações práticas, ou podem ser classificadas desta forma, ou são uma combinação das duas.

Reescrevendo o Problema 3 (aula passada)

Exercício 2.23 (Ross). Rola-se um par de dados honestos. Qual é a probabilidade de o segundo dado sair com um valor maior do que o primeiro?

Solução. Se A é o evento "o segundo dado mostra um valor maior do que o primeiro", então:

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

$$P(A) = \frac{15}{36} \approx 0,4167$$

Outra solução do Problema 3. Considere as variáveis

$$X = \text{“valor do primeiro dado”}$$
$$Y = \text{“valor do segundo dado”}.$$

Note que:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{6} P(A|Y = j)P(Y = j).$$

Como

$$P(Y = j) = P(\text{o segundo dado resulta em } j) = \frac{1}{6}$$

para todo $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e como

$$P(A|Y = 1) = 0, \;\; P(A|Y = 2) = 1/6, \;\; P(A|Y = 3) = 2/6,$$
$$P(A|Y = 4) = 3/6, \;\; P(A|Y = 5) = 4/6, \;\; P(A|Y = 6) = 5/6,$$

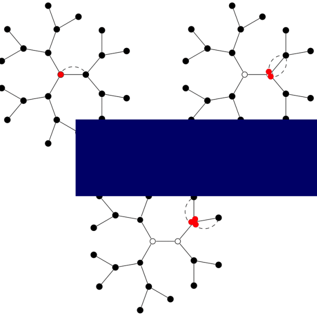
$\ldots$ então: $P(A) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1+2+3+4+5}{6}\right) = \frac{15}{36}.$

Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 4 (Ross): 4.2, 4.5, 4.7, 4.8 (pág. 215).



Bom estudo!