Aula 7: Variáveis aleatórias

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Distribuições contínuas

Lembrete!

Uma variável aleatória X é uma função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 7.1

Seja X variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel. Então,

$$\{X \in B\} \in \mathcal{F} \text{ para todo } B \in \mathcal{B}.$$

Lembrete!

X é (absolutamente) contínua se existe $f(x) \geq 0$ tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Neste caso f é a função densidade de probabilidade de X. Segue que:

$$P(X \in B) = \int_B f(x) dx, \text{ para todo } B \in \mathcal{B}.$$

Observação!

f é uma densidade se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Distribuição Uniforme

X tem *distribuição uniforme* no $(0, 1)$ se:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (0,1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U(0, 1)$.

Observação!

Para qualquer $B \in \mathcal{B}(0,1)$ vale que $P(X \in B) = |B|$. Em particular, $F(x) = x$ para todo $x \in (0,1)$.

Em geral, $X \sim U(a, b)$ se

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a,b), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 7.1

Podemos construir $X \sim Bernoulli(p)$ *a partir de* $U \sim U(0,1)$*: Seja*

$$h:(0,1) \longrightarrow \{0,1\} \text{ tal que } h(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \in (0,p), \\ 0, & \text{se } u \in [p,1). \end{cases}$$

e defina $X = h(U)$*. Então:*

$$P(X=1) = P(h(U)=1) = P(U \in (0,p)) = F_U(p) = p,$$

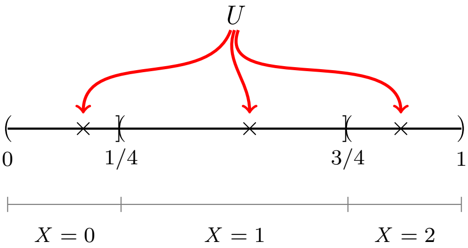
e $P(X=0) = 1 - P(X=1) = 1 - p.$

Exemplo 7.2

Dada $U \sim U(0,1)$ podemos obter X tal que

$$P(X=0)=\frac{1}{4},\ \ P(X=1)=\frac{1}{2},\ \ P(X=2)=\frac{1}{4},$$

fazendo:



Isto é, considerando $X = h(U)$, para

$$h(u)=\begin{cases} 0, & se\ u \in (0,1/4], \\ 1, & se\ u \in (1/4,3/4], \\ 2, & se\ u \in (3/4,1). \end{cases}$$

Exemplo 7.3

Podemos construir X com função de distribuição continua F a partir de $U \sim U(0,1)$: Seja

$$h : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } h(u) = F^{-1}(u)$$

e defina $X = h(U)$. Então:

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P(F^{-1}(U) \leq a) = P(U \leq F(a)) = F(a).$$

por monotonicidade

Distribuição Exponencial

X tem *distribuição exponencial* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim Exp(\lambda)$.

Observação!

Usualmente usada para descrever o tempo até a ocorrência de um evento de interesse.

Se $X \sim Exp(\lambda)$ então $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Perda de memória

Proposição 7.2

Se $X \sim Exp(\lambda)$ então

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t), \quad para\ s, t \in (0, \infty).$$

Prova. Note que

$$P(X > t + s | X > s) = \frac{P(\{X > t + s\} \cap \{X > s\})}{P(X > s)}$$

mas $\{X > t + s\} \subset \{X > s\}$, então

$$P(X > t + s | X > s) = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t).$$

Mínimo de exponenciais independentes

Se temos n variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ então o mínimo ou máximo delas também é variável aleatória. De fato:

$$\{\min\{X_1, \ldots, X_n\} > a\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > a\} \in \mathcal{F}.$$

Proposição 7.3

Se $X_1, \ldots, X_n$ são independentes com $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, então

$$\min\{X_1, \ldots, X_n\} \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Prova. Note que

$$P\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > a\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > a) = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) a}.$$

Distribuição Normal

X tem *distribuição normal* com parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 \in (0, \infty)$ se:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Notação: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Observação!

Usualmente denota-se a função de distribuição de $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, *normal padrão, como* $\Phi(x)$. *Isto é,* $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy$.

Proposição 7.4

Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *e* $Y = aX + b$*, com* $a \neq 0$ *e* b *constantes, então*

$$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Prova. Seja $a > 0$ e note que

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Logo, como $f_Y(x) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$ temos que:

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a\sigma} e^{-\left(\frac{x-b}{a} - \mu\right)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a\sigma} e^{-(x-b-a\mu)^2/2(a\sigma)^2}.$$

Corolário 7.1

Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *então* $Z := \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Observação!

Os valores de $\Phi(x)$ *para* $x \geq 0$ *são dados em tabela. Para* $x < 0$ *basta observar que* $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ *para* $x \in \mathbb{R}$ *(simetria da densidade da normal padrão).*

Exemplo 7.4

Seja $X \sim \mathcal{N}(2, 16)$. *Note que*

$$
\begin{aligned}
P(1 < X < 5) &= P\left(\frac{1-2}{4} < \frac{X-2}{4} < \frac{5-2}{4}\right) \\
&= P(-\frac{1}{4} < Z < \frac{3}{4}) \\
&= \Phi\left(\frac{3}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{4}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{3}{4}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{4}\right)\right] \approx 0,3721
\end{aligned}
$$

Aproximação normal para a binomial

Seja $S_n \sim B(n,p)$. Então, para quaisquer $a < b$ vale que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Em outras palavras, para n suficientemente grande:

$$P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

Observação!

Lembre que podemos escrever $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *em que* $X_1, X_2, \ldots$ *são i.i.d. com* $X_1 \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Exemplo 7.5

Seja $X \sim B(40, 1/2)$. *Note que* $P(X = 20) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} \approx 0,1254$, *enquanto que, aproximando pela normal,*

$$
\begin{aligned}
P(X = 20) &= P(19,5 \leq X \leq 20,5) \\
&= P\left(\frac{19,5-20}{\sqrt{10}} \leq \frac{X-20}{\sqrt{10}} \leq \frac{20,5-20}{\sqrt{10}}\right) \\
&= P\left(-0,16 \leq \frac{X-20}{\sqrt{10}} \leq 0,16\right) \\
&\approx P\left(-0,16 \leq Z \leq 0,16\right) \\
&= \Phi(0,16) - \Phi(-0,16) \approx 0,1272
\end{aligned}
$$

Bom estudo!