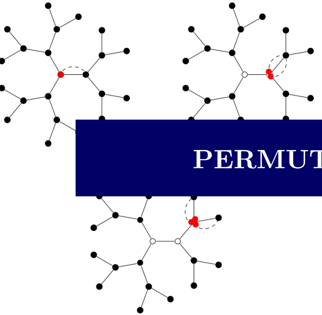
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



PERMUTAÇÕES COM OBJETOS IDÊNTICOS

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 5

- Exercício de revisão.
- Permutações com objetos idênticos.
- Coeficientes multinomiais.

Revisão

Exemplo 5.1

De quantas formas 8 pessoas podem se sentar em fila se:

1. *não houver restrições com relação à ordem dos assentos?*
2. *as pessoas A e B tiverem que se sentar uma ao lado da outra?*
3. *houver 4 homens e 4 mulheres e não for permitido que dois homens ou duas mulheres se sentem em posições adjacentes?*
4. *houver 5 homens e for necessário que eles se sentem lado a lado?*
5. *houver 4 casais e cada casal precisar sentar-se junto?*

Lembrete: coeficientes Binomiais

Denotamos, para $r \leq n$:

$$\binom{n}{r} := \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

e observamos que, como $0! = 1$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Observação

Os valores $\binom{n}{r}$ recebem o nome de coeficientes binomiais. Em alguns livros são denotados por $C_{n,r}$.

Exemplo 5.2

Quantos anagramas tem a palavra "TÁRTARA"?

Solução. *Se bem há* $7! = 5040$ *permutações destas letras, note que "TÁRTARA" tem letras repetidas. Então, obtemos um número de anagramas menor do que obteríamos se as letras fossem distintas. Note que, por exemplo,*

$$TAR_1 TAR_2 A \quad e \quad TAR_2 TAR_1 A$$

foram contados como anagramas diferentes! O número anagramas da palavra "TÁRTARA" será representado por

$$\binom{7}{3, 2, 2},$$

que é o número de permutações de 7 letras das quais 3 *são iguais a* A, 2 *são iguais a* R *e* 2 *são iguais a* T.

Continuação do Exemplo 5.2. Para determinar o número de anagramas podemos pensar de dois modos.

Modo 1.

Para formar o número de anagramas da palavra "TÁRTARA" temos que arrumar 3 A, 2 R e 2 T em 7 lugares.

- O número de modos de escolher os lugares onde serão colocados as A são $C_{7,3}$.
- O número de modos de escolher os lugares onde serão colocados as R são $C_{4,2}$.
- Há uma única forma de escolher os lugares para as T.

Logo,

$$\binom{7}{3,2,2} = C_{7,3} \times C_{4,2} \times 1 = 35 \times 6 \times 1 = 210.$$

Continuação do Exemplo 5.2.

Modo 2.

Se as letras fossem diferentes, obteríamos 7! anagramas. Mas ...

- Como as A são iguais, contamos cada anagrama 3! vezes.
- Como as R são iguais, contamos cada anagrama 2! vezes.
- Como as T são iguais, contamos cada anagrama 2! vezes.

Logo,

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

Permutações com objetos idênticos

Em geral, seja

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

O número de permutações de n objetos, dos quais n_1 são iguais a a_1, n_2 são iguais a a_2, ..., n_k são iguais a a_k, é dado por:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n! \cdots n_k!}.$$

Observação

Os valores $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ *recebem o nome de coeficientes multinomiais.*

Exemplo 5.3

Quantos anagramas da palavra "URUGUAI" começam por vogal?

Solução. *Note que:*

- *Há* $\binom{6}{2,1,1,1,1}$ *anagramas começando com U.*
- *Há* $\binom{6}{3,1,1,1,1}$ *anagramas começando com A.*
- *Há* $\binom{6}{3,1,1,1,1}$ *anagramas começando com I.*

Portanto existem

$$\binom{6}{2,1,1,1,1} + 2 \times \binom{6}{3,1,1,1,1} = 600$$

anagramas da palavra URUGUAI começando com vogal.

Outra aplicação

Se temos um conjunto com n objetos distintos, então

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n! \cdots n_k!},$$

conta o número de formas de dividir os n objetos em k subconjuntos distintos de tamanhos

$$n_1, n_2, \ldots, n_k$$

com $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

De fato, há

$$\binom{n}{n_1}$$

formas possíveis de compor o primeiro grupo; para cada uma destas formas há

$$\binom{n-n_1}{n_2}$$

formas possíveis de compor o segundo grupo; para cada escolha dos dois primeiros grupos há

$$\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$$

escolhas possíveis para o terceiro grupo, etc.

Logo, pelo princípio multiplicativo temos

$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n - n_1}{n_2} \times \cdots \binom{n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}}{n_k}$$

é igual a

$$\left\{ \frac{n!}{\cancel{(n - n_1)!}n_1!} \right\} \times \left\{ \frac{\cancel{(n - n_1)!}}{\cancel{(n - n_1 - n_2)!}n_2!} \right\} \times \cdots \times \left\{ \frac{\cancel{(n - n_1 - \cdots - n_{k-1})!}}{(n - n_1 - \cdots - n_k)!n_k!} \right\}$$

que, após cancelar fatores e observar que $(n - n_1 - \cdots - n_k)! = 0! = 1$, resulta em

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n! \cdots n_k!}.$$

Exemplo 5.4

Vinte pessoas devem ser divididas em dois grupos de trabalho A e B com 10 pessoas cada. O GT A irá se ocupar de um assunto específico enquanto que o GT B irá trabalhar em um assunto diferente. Quantas divisões diferentes são possíveis?

Solução. *Note que há*

$$\frac{20!}{10!10!} = 184.756$$

divisões possíveis.

Exemplo 5.5

Para organizar as tarefas de uma empresa 20 *pessoas dividem-se em dois grupos de* 10 *pessoas cada. Quantas divisões diferentes são possíveis?*

Solução. Note que agora a ordem dos dois grupos é irrelevante. Isto é, apenas importa a divisão das 20 *pessoas em dois grupos de* 10 *cada. Portanto há*

$$\frac{20!/(10!10!)}{2} = 92.378$$

divisões possíveis.

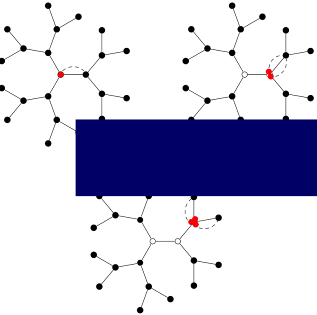
Referências e exercícios sugeridos!

- Morgado, Carvalho, Carvalho, Fernandez. Analise combinatoria e probabilidade. SBM, 1991.
- Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 1 (Ross):
  - 1.28, 1.30 (pág. 33);
  - 1.1 a 1.3 e 1.7 (pág. 36 e 37).

Entregar os exercícios em vermelho na segunda-feira 28/06!



Bom estudo!