Aula 1: Probabilidade

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Experimentos aleatórios e modelo probabilístico.
- Álgebra e σ-álgebra.
- Axiomas de probabilidade.
- Propriedades básicas da probabilidade.
- Sequências monótonas de eventos.
- Continuidade da probabilidade.

Motivação

Experimento 1

Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

- Se A ="soma dos números é 5", então $A \subset \Omega$ é dado por
$$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$
- Se B ="o menor dos números é o 2", então $B \subset \Omega$ é dado por
$$B = \{(i,j) \in \Omega : \min\{i,j\} = 2\}.$$

Pela def. clássica de probabilidade:

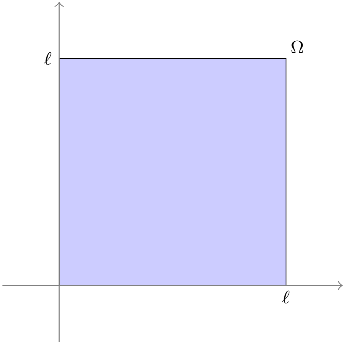
$$P(A) = \frac{\#\text{ resultados favoráveis}}{\#\text{ resultados possíveis}}.$$

Logo $P(A) = \frac{1}{9}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$.

Motivação

Experimento 2

Escolha ao acaso um ponto do quadrado de lado ℓ:

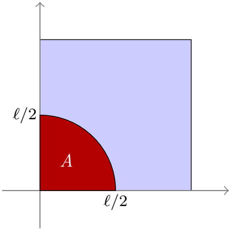


$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, \ell]\}.$$

- Se A =“distância entre o ponto escolhido e a origem é $\leq \ell/2$”, então

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \ell/2\right\}.$$

Isto é:



A probabilidade geométrica é:

$$P(A) = \frac{\#\text{ área de } A}{\#\text{ área de } \Omega}.$$

Logo, $P(A) = \pi/16$.

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Espaço de probabilidade: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

conjunto arbitrário $\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P}(\Omega) \text{ é o conjunto} \\ \text{das partes de } \Omega \end{array} \right\}$

$$P : \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{F} \\ A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F} \\ A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1 \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{array} \right\}$$

medida de probabilidade

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A) > 0 \\ P(\Omega) = 1 \\ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{array} \right\}$$

(para $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$)

σ-álgebra de subconjuntos de Ω

Álgebras

A classe $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é uma **álgebra em** Ω se satisfaz:

a1. $\Omega \in \mathcal{F}$.

a2. Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$.

a3. Se $A \in \mathcal{F}$ e $B \in F$ então $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Observação

Uma álgebra é fechada para um número finito de aplicações de $\bigcap, \bigcup, ^c$.

Proposição 1.1

Se $\mathcal{F}$ *é uma álgebra em* Ω, *então*

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(ii) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, *vale que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F} \quad e \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}.$$

Prova da Prop. 1.1. Se $\mathcal{F}$ é uma álgebra em Ω, então:

(i) Como $\Omega \in \mathcal{F}$ por **a1** temos que $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$ por **a2**.

(ii) Por indução **a3** pode ser estendido para n subconjuntos de $\mathcal{F}$:

- Se $n = 2$ temos o próprio **a3**.
- Suponha que se $A_1, \ldots, A_{n-1} \in \mathcal{F}$, vale que $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathcal{F}$, e considere $A_n \in \mathcal{F}$. Note que

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right\} \bigcup A_n$$

  e podemos aplicar novamente **a3**.

Para interseções, use que:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right\}^c .$$

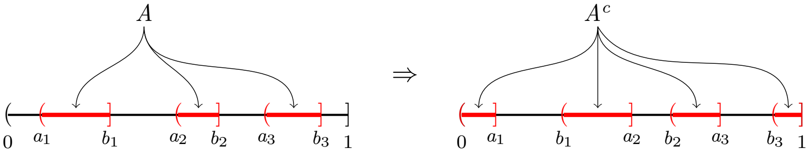
Exemplo 1.1

Seja $\Omega = (0,1]$ *e* $\mathcal{F}_0$ *formada pelo* $\emptyset$ *e pelos conjuntos da forma:*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i], \tag{1}$$

com $n \in \mathbb{N}$ *e* $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$ *para* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Então* $\mathcal{F}_0$ *é algebra em* Ω.

- *Verifique* **a1** *e* **a3**. *Para* **a2** *note que se* $A \in \mathcal{F}_0$ *então:*



Isto é, se A *é como* (1) *então* $A^c = (0, a_1] \bigcup_{i=1}^{n-1} (b_i, a_{i+1}] \bigcup (b_n, 1] \in \mathcal{F}_0$.

σ-álgebras

A classe $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é uma **σ-álgebra em Ω** se satisfaz:

a1. $\Omega \in \mathcal{F}$.

a2. Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$.

a3'. Se $A_n \in \mathcal{F}$ para $n \in \mathbb{N}$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Observação

a3' $\Longrightarrow$ **a3**

Proposição 1.2

Seja $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra em Ω. Se $A_n \in \mathcal{F}$ para $n \in \mathbb{N}$ então $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Observação

Uma σ-álgebra é fechada para um número enumerável de aplicações de $\bigcap, \bigcup, {}^c$.

Exemplo 1.2

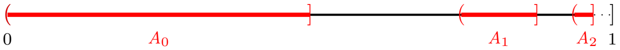
- *Dado* Ω, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ *chama-se* σ*-álgebra trivial de* Ω.

- *Se* Ω *for finito ou enumerável usa-se a* σ*-álgebra* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

- *Continuação do Exemplo 1.1.* $\Omega = (0, 1]$ *e* $\mathcal{F}_0$ *é formada pelo* $\emptyset$ *e pelas uniões finitas de intervalos disjuntos da forma* $(a, b]$, *com* $0 \leq a \leq b \leq 1$. *Então,* $\mathcal{F}_0$ *não é uma* σ*-álgebra. De fato,*

$$A_0 = \left(0, \frac{1}{2}\right] \in \mathcal{F}_0 \text{ e } A_n = \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2^i}, \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{2^i}\right] \in \mathcal{F}_0 \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

é tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{F}_0$:



Probabilidade

A função $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ é uma probabilidade em $\mathcal{F}$ se:

Axioma 1. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. Se $A_n \in \mathcal{F}$, para $n \in \mathbb{N}$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

$$(\sigma - \text{aditividade})$$

Observação

A aditividade finita, para n eventos, é obtida do **Axioma 3** *fazendo $A_i = \emptyset$ para todo $i > n$.*

Propriedades

No que segue $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é espaço de probabilidade e $A, A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$.

As seguintes propriedades resultam dos axiomas:

1. $P(\emptyset) = 0$.
   - *Prova:* Note que $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) \overset{\mathbf{A3}}{=} 2P(\emptyset)$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
   - *Prova:* $1 \overset{\mathbf{A2}}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A) + P(A^c)$.
3. Se $A_1 \subset A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$.
   - *Prova:* Como $A_1 \subset A_2$ então $A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$. Logo,

$$P(A_2) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1) + \underbrace{P(A_2 \cap A_1^c))}_{\geq 0 \text{ por } \mathbf{A1}} \geq P(A_1).$$

Propriedades

4. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

   - *Prova:* Resulta de observar que

$$P(A_1) \stackrel{\textbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2^c),$$

$$P(A_2) \stackrel{\textbf{A3}}{=} P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c), \text{ e}$$

$$P(A_1 \cup A_2) \stackrel{\textbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2^c) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2).$$

Fórmula de inclusão-exclusão:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\ &(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \end{aligned}$$

Propriedades

5. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

- *Prova:* Vamos reescrever $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ como uma união de eventos mutuamente exclusivos. Seja $B_1 := A_1$ e para cada $i \geq 2$ defina:

$$B_i := A_i \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right\}^c.$$

Assim, $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Então,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{\mathbf{A3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

pela construção dos B_i's! verifique!

Sequências de eventos

Ao longo do curso será de interesse trabalhar com sequências de eventos e com seus limites. Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de eventos definimos:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Quando

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$$

dizemos que A é o limite de A_n e o denotamos como $\lim_{n\to\infty} A_n := A$.

Observação

Se $A_n \in \mathcal{F}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então* $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$ *e* $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Sequências monótonas de eventos

Dizemos que uma sequência de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é:

(i) Não-decrescente, denotamos por $A_n \nearrow$, se

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$$

Nesse caso,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ou seja} \quad A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(ii) Não-crescente, denotamos por $A_n \searrow$, se

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$$

Nesse caso,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{ou seja} \quad A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Continuidade da probabilidade

Teorema 1.1

Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de eventos aleatórios.*

(i) *Se* $A_n \nearrow$ *então*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(i) *Se* $A_n \searrow$ *então*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Prova do Teorema 1.1. Vamos provar o item (i). Suponha que $A_n \nearrow$. Nossa primeira tarefa será reescrever a união dos A_i's como uma união de eventos mutuamente exclusivos. Para isso, seja $B_1 := A_1$ e

$$B_n := A_n \cap A_{n-1}^c \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Desta forma $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Logo,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\
&\overset{\mathbf{A3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{P(A_1) + \sum_{i=2}^{n} \left(P(A_i) - P(A_{i-1})\right)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}$$

Observação

Para (ii) note que $A_n \searrow$ implica que $A_n^c \nearrow$. Depois use (i).

Bom estudo!