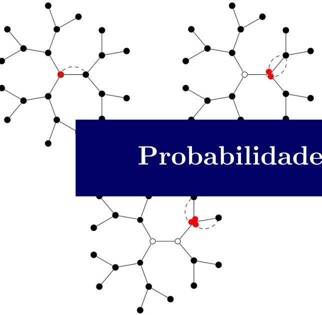
ET658 - Processos Estocásticos para Atuária

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



Probabilidade, probabilidade condicional e independência

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et658-processos-estocasticos

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 1

- Axiomas de probabilidade.
- Probabilidade condicional.
- Independência.

Tipos de experimentos

Definição 1.1

Chamaremos de Experimento Determinístico aquele cujo resultado final é bem determinado. Ou seja, um experimento que a cada repetição apresenta o mesmo resultado.

Definição 1.2

Chamaremos de Experimento Aleatório aquele cujo resultado final carregue incerteza, sendo potencialmente diferente a cada repetição do experimento.

Espaço amostral

Após identificar o experimento aleatório com o qual estamos trabalhando, passamos para a fase de identificar e agrupar os resultados possíveis do experimento.

- Ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, daremos o nome de espaço amostral.
- Denotaremos o espaço amostral de um experimento por Ω;

Exemplo 1.1

Considere o experimento de rolar dois dados. O espaço amostral pode ser descrito como

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\} = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

... continuação do Exemplo 1.1. Suponha que estamos interessados nos resultados onde a soma é igual a 5. Estes resultados formam o subconjunto $A \subset \Omega$ dado por

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}.$$

Se estivermos interessados nos lançamentos onde o valor do primeiro dado é 1, teremos que trabalhar com o subconjunto $B \subset \Omega$

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}.$$

Eventos

- Os subconjuntos de um espaço amostral, para os quais estamos interessados em quantificar a incerteza, serão chamados de eventos.

- Dizemos que um evento $A \subset \Omega$ ocorreu ou foi observado quando o resultado da realização do experimento aleatório pertence a A.

- Assim, seguindo o Exemplo 1.1, se lançarmos dois dados conseguindo o resultado $(2, 3)$, podemos dizer que o evento

$$A = \{\text{a soma dos resultados é igual a 5}\}$$

foi observado, mas o evento

$$B = \{\text{o valor do primeiro dado é 1}\}$$

não ocorreu.

Operação com eventos

Considere eventos $A, B, A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$.

- O evento $A \cup B$ representa o evento onde foi observado o evento A ou o evento B, indiscriminadamente;
- o evento $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ pode ser lido como ocorreu algum dos eventos $A_1, A_2, \ldots$;
- o evento $A \cap B$ representa o evento onde foram observados o evento A e o evento B;
- o evento $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ pode ser lido como todos os eventos $A_1, A_2, \ldots$ foram observados;
- o evento $A^c = \Omega - A$ (o evento complementar de A) também pode ser lido como o evento A não ocorreu.

Considere o Exemplo 1.1, e tome os eventos:

$$\begin{aligned} E &= \{\text{a soma dos resultados é igual a } 7\} \\ &= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F &= \{\text{o valor do segundo dado é igual a } 5\} \\ &= \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\} \end{aligned}.$$

Neste caso temos:

- $E \cup F = \{$a soma dos resultados é 7 ou o segundo dado é 5$\}$;
- $E \cap F = \{$a soma é 7 e o segundo dado é 5$\} = \{(2,5)\}$;
- $E^c = \{$a soma dos resultados é diferente de 7$\}$.

Motivação

Experimento 1

Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$

- Se $A =$"soma dos números é 5", então $A \subset \Omega$ é dado por

$$A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}.$$

- Se $B =$"o menor dos números é o 2", então $B \subset \Omega$ é dado por

$$B = \{(i, j) \in \Omega : \min\{i, j\} = 2\}.$$

Pela def. clássica de probabilidade:

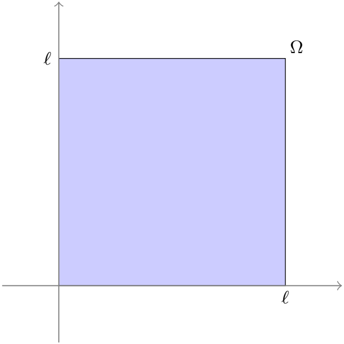
$$P(A) = \frac{\#\text{ resultados favoráveis}}{\#\text{ resultados possíveis}}.$$

Logo $P(A) = \frac{1}{9}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$.

Motivação

Experimento 2

Escolha ao acaso um ponto do quadrado de lado ℓ.

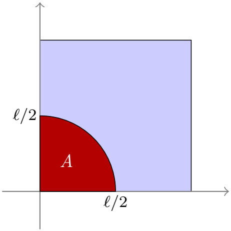


$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, \ell]\}.$$

- Se $A =$"distância entre o ponto escolhido e a origem é $\leq \ell/2$", então

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \ell/2\right\}.$$

Isto é:



A probabilidade geométrica é:

$$P(A) = \frac{\#\text{ área de } A}{\#\text{ área de } \Omega}.$$

Logo, $P(A) = \pi/16$.

Espaço de probabilidade: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

conjunto arbitrário $\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P}(\Omega) \text{ é o conjunto} \\ \text{das partes de } \Omega \end{array} \right\}$

$$P : \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{F} \\ A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F} \\ A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1 \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{array} \right\}$$

medida de probabilidade

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A) > 0 \\ P(\Omega) = 1 \\ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{array} \right\}$$

(para $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$)

σ-álgebra de subconjuntos de Ω

Definição axiomática de probabilidade

A função $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma probabilidade se:

Axioma 1. $P(A) \geq 0$ para todo $A \subset \Omega$.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. Se $A_i \subset \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Propriedades

1. $P(\emptyset) = 0$.

   - Prova: Note que, fazendo $A_1 = \Omega$ e $A_i = \emptyset$ para todo $i \geq 2$:

   $$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{\mathbf{A3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset),$$

   donde resulta que

   $$\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$$

   e portanto $P(\emptyset) = 0$.

Observação

Se $A_1, \ldots, A_n$ são mutuamente exclusivos então $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Propriedades

2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   - *Prova:* $1 \overset{\mathbf{A2}}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A) + P(A^c)$.

3. Se $A_1 \subset A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$.

   - *Prova:* Como $A_1 \subset A_2$ então $A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$. Logo,

$$P(A_2) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1) + \underbrace{P(A_2 \cap A_1^c))}_{\geq 0 \text{ por } \mathbf{A1}} \geq P(A_1).$$

Propriedades

4. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

   - *Prova:* Resulta de observar que

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c), \quad A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap A_1^c),$$

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2).$$

Isto implica:

$$P(A_1) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2^c), \tag{1}$$

$$P(A_2) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c), \tag{2}$$

$$P(A_1 \cup A_2) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2^c) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2). \tag{3}$$

Logo, de (3)

$$P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) \qquad\qquad P(A_2) - P(A_2 \cap A_1)$$

(1) (2)

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \cap A_2^c) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2)$$

... e concluímos o resultado:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Fórmula de inclusão-exclusão:

Em geral, para n eventos $A_1, \ldots, A_n$ temos:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\
&(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).
\end{aligned}
$$

Consequência: Note que sempre vale que

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i).
$$

Exemplo 1.2

Uma pessoa recebe dois livros. A probabilidade dela gostar do primeiro livro é $0,5$*, de gostar do segundo livro é* $0,4$ *e de gostar de ambos os livros é* $0,3$*. Qual é a probabilidade de que ela não goste de nenhum dos livros?*

Solução: Considere os eventos

$$A_i = \text{“a pessoa gosta do } i - \text{ésimo livro“},$$

para $i \in \{1, 2\}$. Queremos saber $P(A_1^c \cap A_2^c)$. Mas note que

$$P(A_1^c \cap A_2^c) = P\left(\{A_1 \cup A_2\}^c\right) = 1 - P\left(A_1 \cup A_2\right).$$

Por outro lado,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0,5 + 0,4 - 0,3 = 0,6.$$

Portanto, $P(A_1^c \cap A_2^c) = 1 - 0,6 = 0,4.$

Exemplo 1.3

Um número entre 1 e 300 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que ele seja divisível por 3 ou por 5.

Solução: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 300\}$ e $P(\omega) = \dfrac{1}{300}$, para cada $\omega \in \Omega$. Seja:

$$A = \text{“o número escolhido é divisível por 3”},$$

$$B = \text{“o número escolhido é divisível por 5”}.$$

Queremos calcular $P(A \cup B)$. Os números entre 1 e 300 divisíveis por:

- 3 são $\lfloor 300/3 \rfloor = 100$;
- 5 são $\lfloor 300/5 \rfloor = 60$;
- 3 e 5 são $\lfloor 300/15 \rfloor = 20$.

Então $P(A) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}$ e $P(A \cap B) = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$, e

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15} \approx 0,467.$$

Exemplo 1.4

Um torneio é disputado por 4 times: A, B, C e D. É 3 vezes mais provável que A vença do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e 3 vezes mais provável que C vença do que D. Quais as probabilidades de ganhar para cada um dos times?

Solução: Se A, B, C e D representam os eventos de que o time A, B, C e D, respectivamente, vença, e se fazemos $p = P(D)$, então:

- $P(C) = 3P(D) = 3p$,
- $P(B) = 2P(C) = 2(3p) = 6p$
- $P(A) = 3P(B) = 3(6p) = 18p$.

Por outro lado, note que $\Omega = \{A, B, C, D\}$ e como $P(\Omega) = 1$ então:

$$1 = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 18p + 6p + 3p + p = 28p.$$

Portanto, $p = \frac{1}{28}$ e assim encontramos as probabilidades de interesse!

Probabilidade condicional: motivação

Experimento: Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

Se $A =$"soma dos números é 5" então $P(A) = 4/36 = 1/9$.

Probabilidade condicional: motivação

Suponha agora que sabe que o evento $B =$"o menor dos números é o 2" ocorreu. Dada esta informação, o que pode dizer sobre A?

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

B

Dado a ocorrência de B a probabilidade de A é $|A \cap B|/|B| = 2/9$.

Probabilidade condicional: motivação

Note que

$$P(A) = \frac{1}{9} \neq \frac{2}{9} = P(A \text{ dado que sabemos da ocorrência de } B).$$

Isto é, saber da ocorrência de um evento pode alterar a probabilidade de ocorrência de outro evento de interesse! Isto está relacionado ao conceito de independência de eventos (veremos depois).

Probabilidade condicional

Sejam A e B eventos tais que $P(B) > 0$.

A probabilidade condicional de A dado B é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorema da Multiplicação

Considere n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Então,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Observação

Para dois eventos A e B temos $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

Prova do teorema: Por indução em n. Verificado para $n = 2$, e supondo válido para $n-1$, note que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_n \cap \left\{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Partição

Dizemos que a sequência de eventos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma partição de Ω se

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega.$$

Exemplos de partição

- No lançamento de uma moeda: $\Omega = \{C, \overline{C}\}$

$$A_1 = \{C\} \text{ e } A_2 = \{\overline{C}\} \text{ são uma partição de } \Omega.$$

- No lançamento de um dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

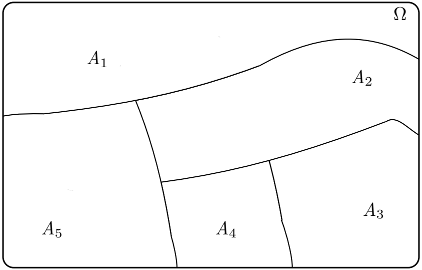
$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{4\}, A_5 = \{5\} \text{ e } A_6 = \{6\}$$

são uma partição de Ω.

Neste caso, outra partição é dada por:

$$A_1 = \{1, 3, 5\} \text{ e } A_2 = \{2, 4, 6\}$$

Como pensar uma partição!



Teorema da Probabilidade Total

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *são eventos que formam uma partição de* Ω, *então*

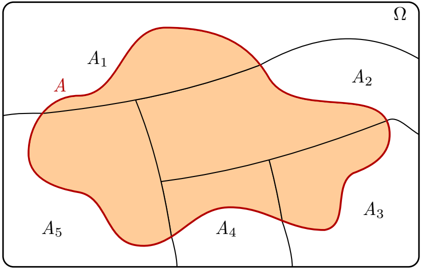
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i)P(A_i),$$

para todo evento A.

Observação

O resultado vale também para uma partição formada por ∞ *eventos.*

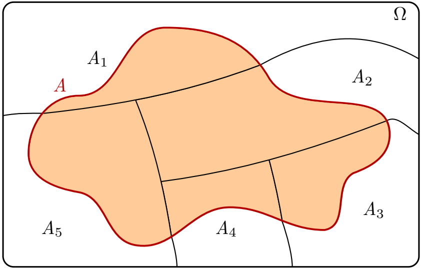
Prova do Teorema da Probabilidade Total:



Como $A_1, \ldots, A_n$ é uma partição de Ω, então $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap A_i\}$ e a união é sobre eventos mutuamente exclusivos. Logo,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i)$$

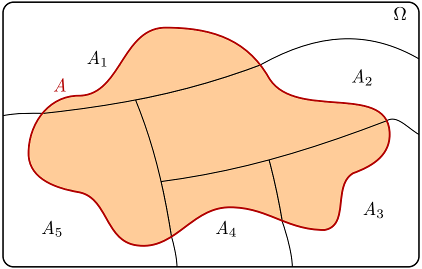
Prova do Teorema da Probabilidade Total:



Como $A_1, \ldots, A_n$ é uma partição de Ω, então $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap A_i\}$ e a união é sobre eventos mutuamente exclusivos. Logo,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i)$$

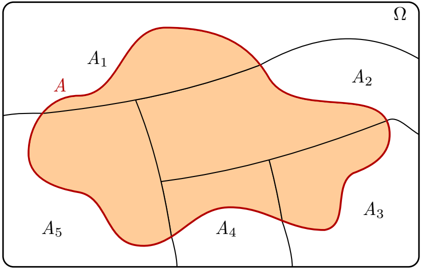
Prova do Teorema da Probabilidade Total:



Como $A_1, \ldots, A_n$ é uma partição de Ω, então $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap A_i\}$ e a união é sobre eventos mutuamente exclusivos. Logo,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i)$$

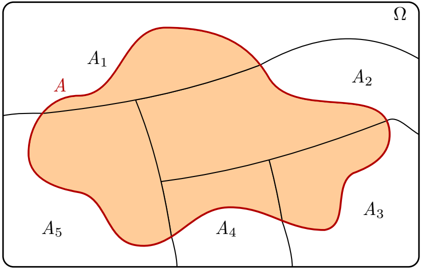
Prova do Teorema da Probabilidade Total:



Como $A_1, \ldots, A_n$ é uma partição de Ω, então $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap A_i\}$ e a união é sobre eventos mutuamente exclusivos. Logo,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i)$$

Prova do Teorema da Probabilidade Total:



Como $A_1, \ldots, A_n$ é uma partição de Ω, então $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap A_i\}$ e a união é sobre eventos mutuamente exclusivos. Logo,

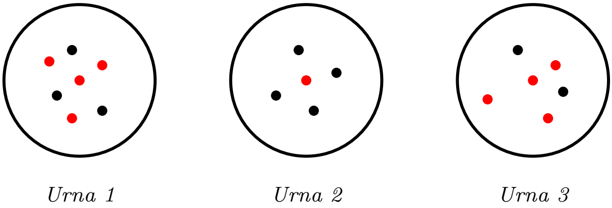
$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|A_i)P(A_i).$$

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Exemplo 1.5

Considere as seguintes urnas contendo bolas vermelhas e pretas:

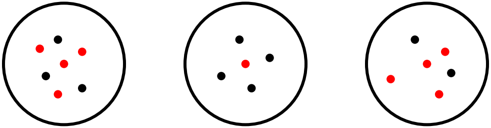


Uma urna é escolhida de acordo às seguintes probabilidades: urna 1 *com probabilidade* $1/2$, *urna* 2 *com probabilidade* $1/4$ *e urna* 3 *com probabilidade* $1/4$. *Logo, da urna escolhida, uma bola é retirada ao acaso e sua cor é observada. Calcule a probabilidade de que seja retirada uma bola vermelha.*

... continuação do Exemplo 1.5. Considere os eventos

$$U_i = \text{“a urna } i \text{ é escolhida”}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

$$V = \text{“a bola retirada é vermelha”}.$$



Urna 1 Urna 2 Urna 3

Como U_1, U_2, U_3 são uma partição de Ω temos que:

$$P(V) = \underbrace{P(V|U_1)}_{=4/7}\overbrace{P(U_1)}^{=1/2} + \underbrace{P(V|U_2)}_{=1/5}\overbrace{P(U_2)}^{=1/4} + \underbrace{P(V|U_3)}_{=2/3}\overbrace{P(U_3)}^{=1/4} \approx 0,502.$$

Teorema de Bayes

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *são eventos que formam uma partição de* Ω*, então para todo evento* A *vale que*

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A|A_i)P(A_i)},$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

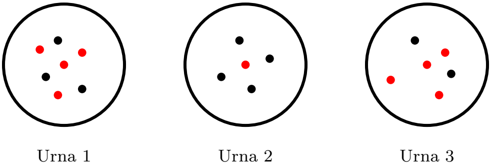
Prova. Note que:

aplique T. da Multiplicação!

$$P(A_i|A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)}$$

aplique T. da Probabilidade Total!

... Voltando ao Exemplo 1.5. Considere as seguintes urnas contendo bolas vermelhas e pretas. Uma urna é escolhida segundo as probabilidades mencionadas e, da urna escolhida, uma bola é retirada ao acaso sendo observada a sua cor.



Dado que uma bola vermelha é retirada, calcule a probabilidade de que a Urna 2 tenha sido a escolhida.

Usando notação de antes e T. de Bayes:

$$P(U_2|V) = \frac{P(V|U_2)P(U_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(V|U_i)P(U_i)}.$$

Independência: motivação

Experimento: Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

Se A =“soma dos números é 5” então $P(A) = 4/36 = 1/9$.

Independência: motivação

Suponha agora que sabe que o evento $B =$"o menor dos números é o 2" ocorreu.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

B

Então $P(A|B) = 2/9 \neq 1/9 = P(A)$.

Independência: motivação

Suponha agora que sabe que o evento C =“o número observado no segundo dado é par” ocorreu.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

C

Então $P(A|C) = 2/18 = 1/9 = P(A)$.

Independência

Dois eventos A e B são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observação

Se A *é tal que* $P(A) \in \{0, 1\}$ *então* A *é independente de qualquer evento* B.

Proposição 1.1

A é independente de si mesmo se, e somente se, $P(A) \in \{0,1\}$.

Prova: Note que $P(A) = P(A \cap A)$, então:

$$A \text{ é independente de si mesmo} \Leftrightarrow P(A) = P(A)^2 \Leftrightarrow P(A) \in \{0,1\}.$$

Proposição 1.2

Se A e B são independentes então A e B^c *também são independentes.*

Prova:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$$

por independência de A e B!

De forma geral

- Os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são ditos de independentes se:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

  para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de eventos independentes se:

$$A_1, \ldots, A_n \text{ são independentes para todo } n \geq 2.$$

Observação

Não confundir com sequências de eventos independentes 2 a 2, para as quais vale apenas que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ se $i \neq j$.

Exemplo 1.6

Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Considere os eventos:

$$A = \text{"o número observado no primeiro dado é ímpar"};$$

$$B = \text{"o número observado no segundo dado é ímpar"};$$

$$C = \text{"a soma dos números observados é ímpar"}.$$

Então, A, B e C são independentes 2 a 2 mas

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

Exemplo 1.7

Considere o experimento de realizar sucessivos lançamentos independentes de uma moeda que tem probabilidade p de dar cara, com $p \in (0,1)$. Determine a probabilidade de que seja necessário realizar pelo menos n lançamentos antes de observar a primeira cara.

Solução: *Considere os eventos*

$$C_i = \text{“o i-ésimo lançamento resulta em cara”},$$

para $i \in \mathbb{N}$ e note que o evento de interesse é dado por

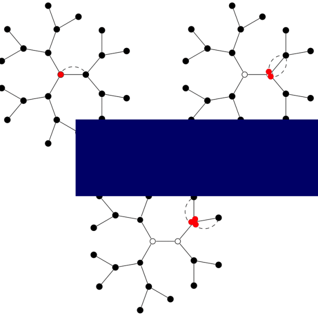
$$C_1^c \cap C_2^c \cap C_3^c \cap \cdots \cap C_n^c = \bigcap_{i=1}^{n} C_i^c.$$

Logo,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i^c\right) = \prod_{i=1}^{n} P(C_i^c) = (1-p)^n.$$

Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.



Bom estudo!