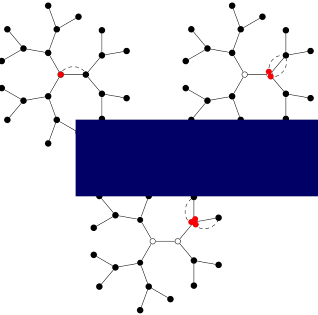
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



INDEPENDÊNCIA

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Conteúdo da Aula 14

- Independência de eventos.

Independência: motivação

Experimento: Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Independência: motivação

Experimento: Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

Se $A =$"soma dos números é 5" então $P(A) = 4/36 = 1/9$.

Independência: motivação

Suponha agora que sabe que o evento B =“o menor dos números é o 2” ocorreu.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

B

Independência: motivação

Suponha agora que sabe que o evento $B =$"o menor dos números é o 2" ocorreu.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

B

Então $P(A|B) = 2/9 \neq 1/9 = P(A)$.

Independência: motivação

Suponha agora que sabe que o evento C =“o número observado no segundo dado é par” ocorreu.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

C

Independência: motivação

Suponha agora que sabe que o evento C =“o número observado no segundo dado é par” ocorreu.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

C

Então $P(A|C) = 2/18 = 1/9 = P(A)$.

Independência

Dois eventos A e B são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observação

Se A é tal que $P(A) \in \{0, 1\}$ então A é independente de qualquer evento B.

Proposição 14.1

A é independente de si mesmo se, e somente se, $P(A) \in \{0,1\}$.

Prova: Note que $P(A) = P(A \cap A)$, então:

$$A \text{ é independente de si mesmo} \Leftrightarrow P(A) = P(A)^2 \Leftrightarrow P(A) \in \{0,1\}.$$

Proposição 14.2

Se A e B são independentes então A e B^c também são independentes.

Prova:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$$

por independência de A e B!

De forma geral

- Os eventos $A_1, \dots, A_n$ são ditos de independentes se:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

  para todo $k \in \{2, \dots, n\}$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de eventos independentes se:

$$A_1, \dots, A_n \text{ são independentes para todo } n \geq 2.$$

Observação

Não confundir com sequências de eventos independentes 2 a 2, para as quais vale apenas que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ se $i \neq j$.

Exemplo 14.1

Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Considere os eventos:

$$A = \text{“o número observado no primeiro dado é ímpar”};$$
$$B = \text{“o número observado no segundo dado é ímpar”};$$
$$C = \text{“a soma dos números observados é ímpar”}.$$

Então, A, B e C são independentes 2 a 2 mas

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

Exemplo 14.2

Considere o experimento de realizar sucessivos lançamentos independentes de uma moeda que tem probabilidade p de dar cara, com $p \in (0,1)$. Determine a probabilidade de que seja necessário realizar pelo menos n lançamentos antes de observar a primeira cara.

Solução: *Considere os eventos*

$$C_i = \text{“o i-ésimo lançamento resulta em cara”},$$

para $i \in \mathbb{N}$ e note que o evento de interesse é dado por

$$C_1^c \cap C_2^c \cap C_3^c \cap \cdots \cap C_n^c = \bigcap_{i=1}^{n} C_i^c.$$

Logo,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i^c\right) = \prod_{i=1}^{n} P(C_i^c) = (1-p)^n.$$

Problema 5 (aula passada)

Um avião tem um voo bem sucedido se a maioria dos seus motores funciona durante o voo. Suponha que o motor de um avião funciona durante um voo, independentemente aos outros motores, com probabilidade p, com $p \in (0, 1)$. Para que valores de p um avião de 5 motores é preferível a um avião de 3 motores?

Solução. Considere os eventos:

$$A_i = \{\text{o avião de } i \text{ motores tem um voo bem sucedido}\}, \quad \text{para } i \in \{3, 5\}.$$

Queremos encontrar os valores de p para os quais:

$$P(A_5) > P(A_3).$$

... continuação do Problema 5. Vamos calcular $P(A_5)$. Note que o evento A_5 ocorre se, por exemplo, o evento:

✔	✖	✔	✖	✔
1	2	3	4	5

3 motores funcionam (✔)
2 motores não funcionam (✖)

ocorre. Mas esse evento pode ocorrer, por independência, com probabilidade:

$$p \times (1-p) \times p \times (1-p) \times p = p^3(1-p)^2.$$

Por outro lado, note que os eventos nos que 3 motores funcionam e 2 motores falham são $\binom{5}{3}$, todos com probabilidade $p^3(1-p)^2$. Portanto, a probabilidade de que funcionem 3 motores e falhem 2 motores é dada por:

$$\binom{5}{3} p^3(1-p)^2.$$

... continuação do Problema 5. Em geral, note que o evento A_5 ocorre se, e somente se:

3 motores funcionam e 2 motores falham

ou

4 motores funcionam e 1 motor falha

ou

os 5 motores funcionam

... continuação do Problema 5. Em geral, note que o evento A_5 ocorre se, e somente se:

$$P\,(3 \text{ motores funcionam e } 2 \text{ motores falham}) = \binom{5}{3} p^3(1-p)^2$$

$$+$$

$$P\,(4 \text{ motores funcionam e } 1\text{motor falha}) = \binom{5}{4} p^4(1-p)$$

$$+$$

$$P\,(\text{os } 5 \text{ motores funcionam}) = p^5$$

... e portanto $P(A_5) = \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4(1-p) + p^5$.

... continuação do Problema 5. Pensando da mesma forma, podemos concluir que

$$P(A_3) = \binom{3}{2} p^2(1-p) + p^3.$$

Logo, nosso problema é encontrar os valores de p para os quais:

$$\binom{5}{3} p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4(1-p) + p^5 > \binom{3}{2} p^2(1-p) + p^3.$$

Isto é, para os quais:

$$6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 > 0,$$

ou, escrito de outra forma, para os quais:

$$(1-p)^2 \left(p - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Note que isto acontece quando $p > 1/2$.

Problema 6

Uma urna contém 5 bolas brancas e 10 bolas pretas. Um dado honesto é rolado e um certo número de bolas é retirado da urna aleatoriamente de acordo com o número que saiu no dado.

a. Qual é a probabilidade de que todas as bolas selecionadas sejam brancas?
b. Qual é a probabilidade condicional de que tenha saído um 3 no dado se todas as bolas selecionadas forem brancas?

Solução. Defina os eventos:

$$A_i = \text{“o dado resulta no número } i\text{”}$$

para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e o evento

$$B = \text{“todas as bolas selecionadas são brancas”}.$$

Note que queremos calcular:

a. $P(B)$;
b. $P(A_3|B)$.

... continuação do Problema 6. Pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(B|A_i)P(A_i)$$

mas

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = 1/6,$$

enquanto que:

$$P(B|A_i) = \frac{\binom{5}{i}}{\binom{15}{i}}$$

para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $P(B|A_6) = 0$. Assim, a resposta de (a) é:

$$\frac{1}{6}\left\{ \frac{\binom{5}{1}}{\binom{15}{1}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{5}{4}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{5}}{\binom{15}{5}} \right\}$$

... continuação do Problema 6. Para (b) usamos o Teorema de Bayes:

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{6} P(B|A_i)P(A_i)} \quad \text{(calcular!)}$$

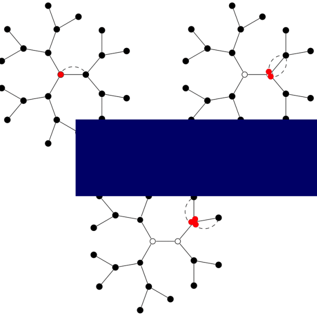
Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 2 (Ross):
  - 2.13, 2.17, 2.21, 2.24, 2.32, 2.33, 2.41 (pág. 72 a 75).
- Capítulo 3 (Ross):
  - 3.5, 3.14, 3.16, 3.17, 3.32, 3.33, 3.43, 3.45, 3.66 (pág. 132 a 139).

Lista Prova 2: Escolher 4 exercícios, dos indicados acima, sendo ao menos dois do Cap. 3, e entregar sua resolução justificada de forma clara até o dia 04/08 às 18h00 por e-mail ou Whatsapp.



Bom estudo!