ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 7

- Problemas de combinatória.

Problema 1. De quantas maneiras podemos dar 2 prêmios a uma turma com 20 estudantes, de modo que os prêmios não sejam dados a uma mesma pessoa? Qual a resposta se é permitido que ambos sejam dados a uma mesma pessoa?

Solução. Para a primeira pergunta note que o 1° prêmio poderá ser dado para alguma das 20 estudantes, enquanto que o 2° prêmio poderá ser dado para alguma das 19 estudantes restantes.

$$\underset{1^\circ}{\overset{\text{20 formas}}{\underline{\qquad}}}\quad \underset{2^\circ}{\overset{\text{19 formas}}{\underline{\qquad}}} \qquad \text{ou} \qquad \underset{1^\circ}{\underline{\ 20\ }}\quad \underset{2^\circ}{\underline{\ 19\ }}$$

Portanto, existem $20 \times 19 = 380$ maneiras de entregar os prêmios. Já para a segunda pergunta note que há

$$\underset{1^\circ}{\underline{\ 20\ }}\quad \underset{2^\circ}{\underline{\ 20\ }} = 20 \times 20 = 400 \text{ formas de entregar os prêmios.}$$

Problema 2. Quantos são os números que podemos formar com todos os os dígitos $1, 1, 1, 1, 2, 3$ e 4?

Solução. Note que colocando todos os dígitos 1's, deixando um espaço entre eles, teremos:

$$\_\_\_ \ 1 \ \_\_\_ \ 1 \ \_\_\_ \ 1 \ \_\_\_ \ 1 \ \_\_\_$$

Isto é, há 5 espaços nos quais podem ser colocados os dígitos 2, 3 e 4. Supondo que o dígito 2 seja colocado primeiro, como há 5 possibilidades para isso, vamos considerar uma dentre estas 5.

$$\_\_\_ \ 1 \ \_\_\_ \ 2 \ \_\_\_ \ 1 \ \_\_\_ \ 1 \ \_\_\_ \ 1 \ \_\_\_$$

Agora há 6 espaços onde o dígito 3 pode ser colocado.

. . . continuação da solução do Problema 2. Logo, temos:

$$\_\_\_ \; 1 \; \_\_\_ \; 2 \; \_\_\_ \; 1 \; \_\_\_ \; 3 \; \_\_\_ \; 1 \; \_\_\_ \; 1 \; \_\_\_$$

Finalmente, como há, agora, 7 espaços para colocar o dígito 4, concluímos que em total há

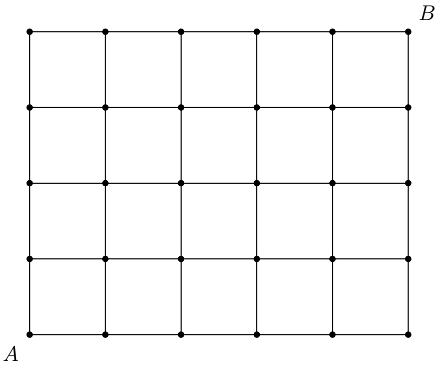
$$5 \times 6 \times 7 = 210$$

números formados com os 7 dígitos, sendo quatro 1's, um 2, um 3 e um 4.

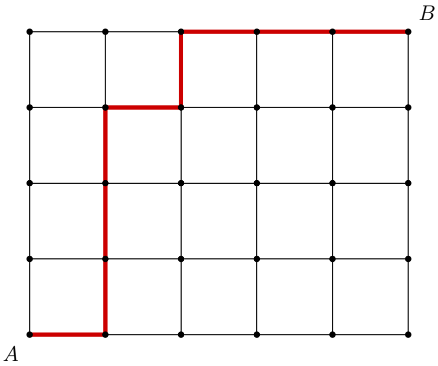
Outra solução. Note que estamos calculando o número de permutações de 9 objetos, dos quais 4 são iguais a 1 e os outros são todos distintos entre si. Então, o número desejado é dado por:

$$\binom{7}{4,1,1,1} = \frac{7!}{4! \times 1! \times 1! \times 1!} = 7 \times 6 \times 5.$$

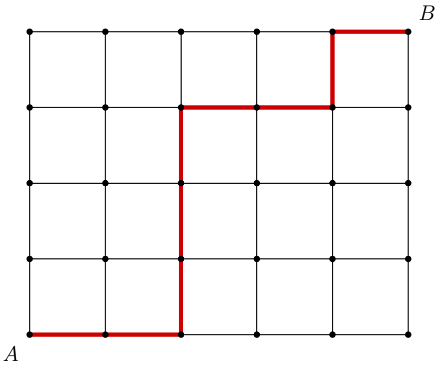
Problema 3 (a). Considere a malha de pontos da imagem e suponha que, começando do ponto A você quer ir para o ponto B. Suponha que somente pode fazer um passo para cima ou para a direita em cada movimento. Quantos caminhos possíveis existem entre A e B?



Problema 3 (a). Considere a malha de pontos da imagem e suponha que, começando do ponto A você quer ir para o ponto B. Suponha que somente pode fazer um passo para cima ou para a direita em cada movimento. Quantos caminhos possíveis existem entre A e B?



Problema 3 (a). Considere a malha de pontos da imagem e suponha que, começando do ponto A você quer ir para o ponto B. Suponha que somente pode fazer um passo para cima ou para a direita em cada movimento. Quantos caminhos possíveis existem entre A e B?



Solução. Note que para atingir B desde A, devem ser realizados 4 passos para cima e 5 passos para a direita. Por exemplo:

$$1 \text{ forma: } \underset{1}{\underline{\uparrow}}\ \underset{2}{\underline{\rightarrow}}\ \underset{3}{\underline{\uparrow}}\ \underset{4}{\underline{\rightarrow}}\ \underset{5}{\underline{\rightarrow}}\ \underset{6}{\underline{\uparrow}}\ \underset{7}{\underline{\rightarrow}}\ \underset{8}{\underline{\uparrow}}\ \underset{9}{\underline{\rightarrow}}$$

5 para a direita ($\rightarrow$)

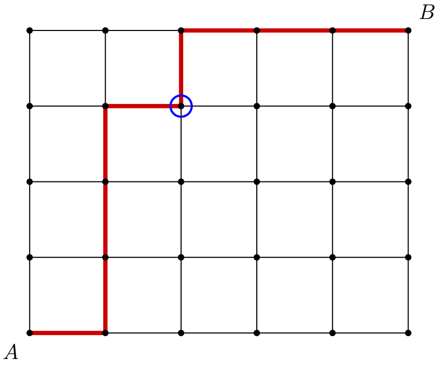
4 para cima ($\uparrow$)

Mas, os 4 passos para cima podem ser conseguidos de

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 7 \times 2 = 126$$

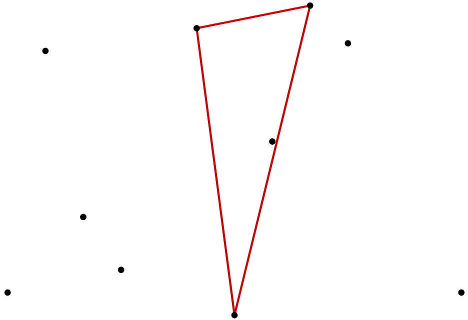
formas diferentes. Isto implica que o número de caminhos possíveis entre A e B é 120.

Problema 3 (b). Agora encontre o número de caminhos possíveis que existem entre A e B que passam pelo ponto circulado mostrado na figura?



Solução. Neste caso temos $\binom{5}{2} \times \binom{4}{3} = 40$ caminhos possíveis.

Problema 4. Quantos triângulos diferentes podem ser traçados utilizando- se 10 pontos de um plano, não havendo 3 pontos alinhados?



Solução. Neste caso temos

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

triângulos possíveis.

Problema 5. De quantas maneiras podemos escolher 3 números naturais distintos de 1 a 20, de modo que a soma dos números escolhidos seja par?

Solução. Considere os conjuntos

$$A = \{1, 2, \ldots, 20\},$$

$$A_p = \{n \in A : n \text{ é } par\}, \quad \text{e} \quad A_i = \{n \in A : n \text{ é } mpar\}.$$

Note que para que a soma de três números escolhidos seja par:

- Ou os três números são de A_p;
- ou dois números são de A_i e o terceiro número é de A_p.

Mas tais números podem ser escolhidos de:

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{2} \times \binom{10}{1} = 570 \text{ formas diferentes!}$$

Problema 6. Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de quantos modos é possível formar subconjuntos de 2 elementos nos quais não haja números consecutivos?

Solução. Note que temos 6 subconjuntos desse tipo:

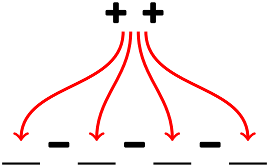
$$\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}.$$

Para fazer esta contagem, podemos representar, por exemplo:

$$\begin{aligned} \{1, 3\} &= \boldsymbol{+}\ \boldsymbol{-}\ \boldsymbol{+}\ \boldsymbol{-}\ \boldsymbol{-} \\ \{2, 5\} &= \boldsymbol{-}\ \boldsymbol{+}\ \boldsymbol{-}\ \boldsymbol{-}\ \boldsymbol{+} \\ \{4, 5\} &= \boldsymbol{-}\ \boldsymbol{-}\ \boldsymbol{-}\ \boldsymbol{+}\ \boldsymbol{+} \end{aligned}$$

... e o problema se reduz a colocar 3 sinais ($\boldsymbol{-}$) e 2 sinais ($\boldsymbol{+}$) em fila, sem que haja 2 sinais ($\boldsymbol{+}$) consecutivos.

. . . continuação da solução do Problema 6. Note que é suficiente colocar os 2 sinais (**+**) nos espaços existentes entre os 3 sinais (**−**):



o que pode ser feito de $\binom{4}{2} = 6$ formas diferentes.

Problema 7. Dado $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, de quantos modos é possível formar subconjuntos de k elementos nos quais não haja números consecutivos?

Solução. Como no Problema 6, para formar subconjuntos de k elementos não consecutivos, devemos tomar k sinais ($\boldsymbol{+}$), $(n-k)$ sinais ($\boldsymbol{-}$) e observar que há:

$$\_\_\_ \boldsymbol{-} \_\_\_ \boldsymbol{-} \_\_\_ \boldsymbol{-} \_\_\_ \boldsymbol{-} \_\_\_ \cdots \_\_\_ \boldsymbol{-} \_\_\_ \boldsymbol{-} \_\_\_$$

$(n-k+1)$ espaços para os k sinais ($\boldsymbol{+}$), o que podemos fazer de

$$\binom{n-k+1}{k}$$

formas diferentes!

Primeiro Lema de Kaplansky

O número de subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é $\binom{n-k+1}{k}$.

Problema 8. Quantas são as soluções inteiras não-negativas da inequação $x + y + z \leq 4$?

Solução. Podemos dividir as soluções entre aquelas nas quais:

$$x + y + z = 0, \;\; x + y + z = 1, \;\; \ldots \;\; , \text{ e } x + y + z = 4.$$

Logo, a resposta é dada por

$$CR_{3,0} + CR_{3,1} + CR_{3,2} + CR_{3,3} + CR_{3,4} = \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4},$$

Isto é, $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$.

Problema 9. Quantas são as soluções inteiras da equação $x + y + z = 30$ com $x \geq 2$, $y \geq 1$ e $z \geq 3$?

Solução. Vamos fazer a mudança de variáveis:

$$x = 2 + a, \;\; y = 1 + b, \;\; z = 3 + c.$$

Desta forma, a $x + y + z = 30$ é equivalente à equação $a + b + c = 24$ e as restrições $x \geq 2$, $y \geq 1$ e $z \geq 3$ são equivalentes a $a, b, c \geq 0$ e inteiros. Portanto, o número de soluções procurado é:

$$CR_{3,24} = \binom{26}{24} = \frac{26 \times 25}{2 \times 1} = 325.$$

Problema 10. Uma mulher tem 7 amigas e 4 amigos. Seu esposo tem 7 amigos e 4 amigas. De quantos modos eles podem convidar 6 amigas e 6 amigos, se cada um deve convidar 6 pessoas?

Solução. Note que as opções possíveis são:

1. a mulher escolhe 6 amigas e o homem 6 amigos;
2. a mulher escolhe 5 amigas e 1 amigo e o homem 1 amiga e 5 amigos;
3. a mulher escolhe 4 amigas e 2 amigos e o homem 2 amigas e 4 amigos;
4. a mulher escolhe 3 amigas e 3 amigos e o homem 3 amigas e 3 amigos;
5. a mulher escolhe 2 amigas e 4 amigos e o homem 4 amigas e 2 amigos.

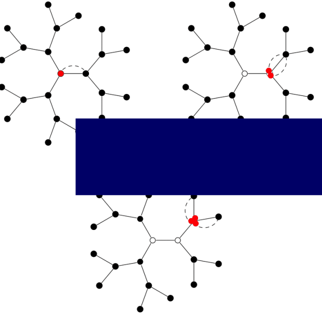
Mas estas escolhas podem ser realizadas de

$$\sum_{i=0}^{4} \left\{ \binom{7}{6-i} \times \binom{4}{i} \right\} \times \left\{ \binom{4}{i} \times \binom{7}{6-i} \right\}$$

formas diferentes.

Referências e exercícios sugeridos!

- Morgado, Carvalho, Carvalho, Fernandez. Analise combinatoria e probabilidade. SBM, 1991.
- Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.



Bom estudo!