Aula 2: Probabilidade condicional

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Lembrete da aula anterior: fórmula de inclusão-exclusão
- Probabilidade condicional.
- Resultados importantes:
  - Teorema da Multiplicação.
  - Teorema da Probabilidade Total.
  - Teorema de Bayes.

Fórmula de inclusão-exclusão

Seja $A_i \in \mathcal{F}$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\
&(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).
\end{aligned}
$$

Observação

Eliminando termos obtemos as Desigualdades de Bonferroni. Por exemplo:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad ou \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j).$$

O problema do pareamento

Suponha que cada uma das n pessoas presentes em uma festa atire seu chapéu para o centro da sala. Os chapéus são misturados e depois cada pessoa seleciona ao acaso um deles. Determine a probabilidade de que nenhuma das pessoas selecione o seu próprio chapéu.

Solução. Considere os eventos

$$A_i = \text{“a } i\text{-ésima pessoa seleciona o seu próprio chapéu”},$$

para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Queremos encontrar

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

O problema do pareamento

Solução do problema do pareamento. A ideia é usar a fórmula de inclusão-exclusão. Como

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \frac{(n-k)!}{n!},$$

temos que

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \binom{n}{k} \left\{ \frac{(n-k)!}{n!} \right\} = \frac{1}{k!}$$

e assim a probabilidade de interesse é dada por

$$1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Probabilidade condicional: motivação

Experimento: Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Probabilidade condicional: motivação

Experimento: Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

Se $A =$"soma dos números é 5" então $P(A) = 4/36 = 1/9$.

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Probabilidade condicional: motivação

Suponha agora que sabe que o evento $B =$“o menor dos números é o 2” ocorreu. Dada esta informação, o que pode dizer sobre A?

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

B

Dado a ocorrência de B a probabilidade de A é $|A \cap B|/|B| = 2/9$.

Probabilidade condicional

Lembrete!

No que segue se considera um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Seja $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) > 0$.

A probabilidade condicional de A dado B é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Observação

Seja $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) > 0$. Se $P_B : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ é definida por

$$P_B(A) := P(A|B),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$ então P_B é uma probabilidade em $\mathcal{F}$. De fato:

- Verifique **A1** e **A2** para P_B.
- **A3** vale pois se $A_n \in \mathcal{F}$, para $n \in \mathbb{N}$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$, então

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \bigcap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{A_n \cap B\}\right)}{P(B)}.$$

Logo

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n).$$

Teorema da Multiplicação

Se $A_i \in \mathcal{F}$, *para todo* $i \in 1, \ldots, n$. *Então,*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Observação

Para $A, B \in \mathcal{F}$ *o teorema diz que* $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

Prova do teorema: Por indução em n. Verificado para $n = 2$, note que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_n \cap \left\{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

O problema do pareamento

No problema do pareamento encontramos que a probabilidade de que nenhuma das n pessoas selecione o próprio chapéu é igual a:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Determine agora a probabilidade de que exatamente k das n pessoas encontrem seus chapéus.

... continuação. Fixamos um conjunto de k pessoas e definimos:

$$A = \text{“cada uma das } k \text{ pessoas seleciona seu chapéu”},$$

$$B = \text{“nenhuma das } n-k \text{ pessoas restantes seleciona o seu chapéu”}.$$

Note que $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$. Agora, para $i \in \{1, \ldots, k\}$, seja

$$A_i = \text{“a } i\text{-ésima do conjunto de } k \text{ pessoas seleciona o seu chapéu”}.$$

Então $P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P\left(A_k \middle| \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$, e como

$$P(B|A) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!},$$

então a probabilidade desejada é $\dbinom{n}{k} P(A \cap B) = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

Partição

A sequência de eventos aleatórios $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma partição de Ω se

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega.$$

Teorema da Probabilidade Total

Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, *e a sequência forma uma partição de* Ω, *então*

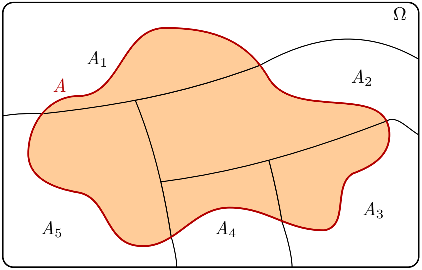
$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$.

Observação

Para uma partição formada por n *eventos aleatórios, o resultado é obtido fazendo* $A_i = \emptyset$ *para todo* $i > n$.

Prova do Teorema da Probabilidade Total:

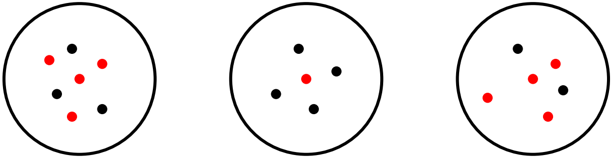


Como $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma partição de Ω, então $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{A\cap A_i\}$ e a união é sobre eventos mutuamente exclusivos. Logo,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{A\cap A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A\cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i).$$

Exemplo 2.1

Considere as seguintes urnas contendo bolas vermelhas e pretas:



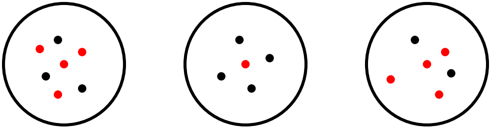
Urna 1 *Urna 2* *Urna 3*

Escolha ao acaso uma urna e, da urna escolhida, retire ao acaso uma bola observando sua cor. Calcule a probabilidade de que seja retirada uma bola vermelha.

... continuação do Exemplo 2.1. Considere os eventos

$$U_i = \text{“a urna } i \text{ é escolhida”}, \quad i \in \{1,2,3\}$$

$$V = \text{“a bola retirada é vermelha”}.$$



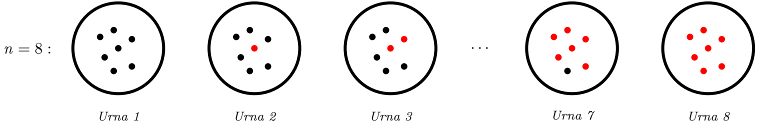
Urna 1 Urna 2 Urna 3

Como U_1, U_2, U_3 são uma partição de Ω temos que:

$$P(V) = \underbrace{P(V|U_1)}_{=4/7}\overbrace{P(U_1)}^{=1/3} + \underbrace{P(V|U_2)}_{=1/5}\overbrace{P(U_2)}^{=1/3} + \underbrace{P(V|U_3)}_{=2/3}\overbrace{P(U_3)}^{=1/3} \approx 0,48.$$

Exemplo 2.2

Considere n urnas sendo que a i-ésima urna contem $i-1$ bolas vermelhas e $n-i$ bolas pretas, $i \in \{1, \dots, n\}$:

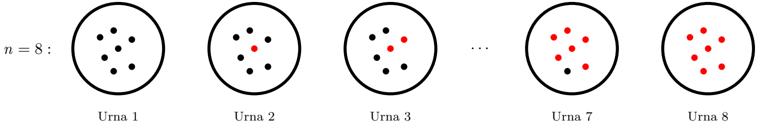


Escolha uma urna ao acaso e, da urna escolhida, retire ao acaso e sem reposição duas bolas. Calcule a probabilidade de que as bolas retiradas sejam de cores diferentes.

... continuação do Exemplo 2.2. Considere os eventos

$$U_i = \text{“a urna } i \text{ é escolhida”}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$V_i = \text{“a } i\text{-ésima bola retirada é vermelha”}, \quad i \in \{1, 2\}.$$



- Note que $P(V_1) = P(V_1^c)$,
- e que a probabilidade de interesse é dada por $2P(V_1 \cap V_2^c)$.

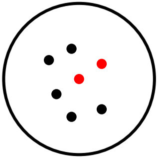
Mas,

$$P(V_1 \cap V_2^c) = \sum_{i=1}^{n} P(V_1 \cap V_2^c | U_i) P(U_i).$$

... continuação do Exemplo 2.2.

$$P(V_1 \cap V_2^c) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P(V_1 \cap V_2^c | U_i)}_{=\frac{(i-1)(n-i)}{(n-1)(n-2)}} \underbrace{P(U_i)}_{=1/n}.$$

Urna i



$i-1$ vermelhas

$n-i$ pretas

$$P(V_1 \cap V_2^c) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} (i-1)(n-i)$$

- A probabilidade desejada é $2P(V_1 \cap V_2^c) = 1/3$.

Teorema de Bayes

Se $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, e a sequência forma uma partição de Ω, então para todo $A \in \mathcal{F}$ vale que

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i)},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

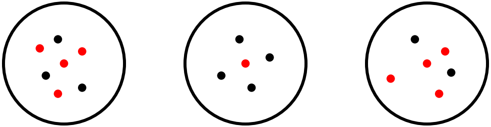
Prova. Note que:

aplique T. da Multiplicação!

$$P(A_i|A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)}$$

aplique T. da Probabilidade Total!

... Voltando ao Exemplo 2.1. *Considere as seguintes urnas contendo bolas vermelhas e pretas, escolha ao acaso uma urna e, da urna escolhida, retire ao acaso uma bola observando sua cor.*



Urna 1 Urna 2 Urna 3

Dado que uma bola vermelha é retirada, calcule a probabilidade de que a Urna 2 tenha sido a escolhida.

Usando notação de antes e T. de Bayes:

$$P(U_2|V) = \frac{P(V|U_2)P(U_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(V|U_i)P(U_i)}.$$

Bom estudo!