Aula 25: Convergência em distribuição

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Convergência em distribuição.
- Teorema Central do Limite
- Propriedades e Teorema de Slutsky

Convergência em distribuição

Considere uma sequência de variáveis aleatórias $X, X_1, X_2, \ldots$ com funções de distribuição $F, F_1, F_2, \ldots$

Dizemos que X_n converge em distribuição para X se:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

para todo x ponto de continuidade de F.

Notação: $X_n \xrightarrow{D} X$ ou $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Observação!

Se $X_n \xrightarrow{D} X$ dizemos que F_n converge fracamente para F.

Funções características e convergência em distribuição

Se X é uma variável aleatória, sua função característica é a função

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},$$

tal que $\varphi(t) = E\left(e^{itX}\right) = E(cos\{tX\}) + iE(sen\{tX\})$, para $t \in \mathbb{R}$

Resultado!

$X_n \xrightarrow{D} X$ se, e somente se, $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Aplicação: Teorema Central do Limite

Teorema 25.1

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ *i.i.d. com* $\mu = E(X_1)$ *e* $\sigma^2 = Var(X_1) < \infty$. *Então:*

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Em outras palavras:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

ou

$$P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a), \quad \textit{para } n \textit{ suficientemente grande.}$$

Prova do TCL. Considere $\mu = 0$. Vamos provar que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n/(\sigma\sqrt{n})}(t) = e^{-t^2/2}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n/(\sigma\sqrt{n})}(t) &= E\left(e^{it\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \\
&= E\left(e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{itX_k}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} E\left(e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}X_k}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&= \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos a notação $\varphi := \varphi_{X_1}$.

... continuação da prova do TCL. Conseguimos que

$$\varphi_{S_n/(\sigma\sqrt{n})}(t) = \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Como $E(X_1^2) < \infty$ então φ possui duas derivadas contínuas e pela fórmula de Taylor:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \varphi''(\theta(t))\frac{t^2}{2}, \text{ com } |\theta(t)| \leq |t|.$$

Logo,

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \varphi''(0)\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}\left(\varphi''(\theta(t)) - \varphi''(0)\right),$$

com $\lim_{t\to 0}\left(\varphi''(\theta(t)) - \varphi''(0)\right) = 0$. Como $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = \mu$, $\varphi''(0) = -\sigma^2$, temos que

$$\varphi(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2}\epsilon(t), \text{ com } \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0.$$

... continuação da prova do TCL. Então, fixando $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left\{1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + \frac{t^2}{2\sigma^2 n}\epsilon\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right\}^n$$

e como

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n/(\sigma\sqrt{n})}(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = e^{-t^2/2}.$$

Isto é,

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Caso discreto

Proposição 25.1

Sejam $X, X_1, X_2, \ldots$ *variáveis aleatórias com valores em* $\{0, 1, 2 \ldots\}$ *e:*

$$p(i) := P(X = i), \;\; p_n(i) := P(X_n = i), \quad para\ i \in \{0, 1, \ldots\}\ e\ n \in \mathbb{N}.$$

Então $X_n \xrightarrow{D} X$ *se, e somente se,* $\lim\limits_{n \to \infty} p_n(i) = p(i), \forall i \in \{0, 1, \ldots\}$.

Observação!

Em geral, se $\{x_k\}_{k \geq 1}$ *são os possíveis valores das variáveis aleatórias então:*

$$\lim_{n \to \infty} p_n(x_k) = p(x_k), \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow X_n \xrightarrow{D} X.$$

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Caso contínuo: Teorema de Scheffé

Proposição 25.2

Sejam $X, X_1, X_2, \ldots$ *variáveis aleatórias com densidades* $f, f_1, f_2, \ldots$ *Se*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

para quase todo x *então* $X_n \xrightarrow{D} X$.

Exemplo 25.1

Seja $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, *para* $n \in \mathbb{N}$ *e suponha que*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \quad e \ que \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2.$$

Então, como para todo $x \in \mathbb{R}$ *vale que*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \right\} e^{-(x-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right\} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},$$

... e concluimos que $X_n \xrightarrow{D} X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Funções continuas e convergência

Proposição 25.3

Sejam $X, X_1, X_2, \ldots$ *variáveis aleatórias e* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua.*

1. *Se* $X_n \stackrel{q.c.}{\rightarrow} X$, *então* $g(X_n) \stackrel{q.c.}{\rightarrow} g(X)$.
2. *Se* $X_n \stackrel{P}{\rightarrow} X$, *então* $g(X_n) \stackrel{P}{\rightarrow} g(X)$.
3. *Se* $X_n \stackrel{D}{\rightarrow} X$, *então* $g(X_n) \stackrel{D}{\rightarrow} g(X)$.

Teorema de Slutsky

Teorema 25.2

Sejam $X, X_1, X_2, \ldots$ *e* $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ *variáveis aleatórias tais que:*

$$X_n \xrightarrow{D} X \quad e \ Y_n \xrightarrow{P} c \ \ (c \text{ uma constante}).$$

Então:

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$;
2. $X_n - Y_n \xrightarrow{D} X - c$;
3. $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$;
4. *se* $c \neq 0$ *e* $P(Y_n \neq 0) = 1$ *então* $\dfrac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{D} \dfrac{X}{c}$.

Prova do Teorema de Slutsky. (1) Vamos provar que, para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{X_n+Y_n}(t) \to \varphi_{X+c}(t), \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Note que

$$\varphi_{X_n+Y_n}(t) = E\left(e^{it(X_n+Y_n)}\right) = E\left(e^{it(X_n+c)}\right) + E\left(e^{itX_n}\left\{e^{itY_n} - e^{itc}\right\}\right),$$

e que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{it(X_n+c)}\right) = e^{itc} \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{itc}\varphi_X(t) = \varphi_{X+c}(t).$$

No que segue, verificamos que:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{itX_n}\left\{e^{itY_n} - e^{itc}\right\}\right) = 0.$$

... continuação da prova do Teorema de Slutsky. Note que

$$\left|E\left(e^{itX_n}\left\{e^{itY_n}-e^{itc}\right\}\right)\right| \leq E\left(\left|e^{itX_n}\left\{e^{itY_n}-e^{itc}\right\}\right|\right) = E\left(\left|e^{itY_n}-e^{itc}\right|\right),$$

pois $|e^{itX_n}| = 1$. Seja $Z_n := |e^{itY_n} - e^{itc}|$ e note que

$$\begin{aligned} 0 &\leq E(Z_n) \\ &= E(Z_n I_{[Z_n \leq \epsilon]}) + E(Z_n I_{[Z_n > \epsilon]}), \quad \text{(para algum } \epsilon > 0) \\ &\leq \epsilon + 2E(I_{[Z_n > \epsilon]}) \\ &= \epsilon + 2P(Z_n > \epsilon) \\ &< 2\epsilon, \end{aligned}$$

para n suficientemente grande ($Z_n \xrightarrow{P} 0$). Para finalizar tome $\epsilon \to 0$.

... continuação da prova do Teorema de Slutsky. (2) Basta observar:

$$-Y_n \xrightarrow{P} -c$$

e aplicar (1). Para (3) considere $c = 0$. Vamos provar que

$$X_n Y_n \xrightarrow{P} 0.$$

Sejam $\epsilon > 0, \delta > 0$ e $x < 0 < y$ pontos de continuidade de F_X tais que:

$$F_X(y) - F_X(x) = P(x < X \leq y) > 1 - \delta.$$

Como $X_n \xrightarrow{D} X$ então

$P(x < X_n \leq y) = F_{X_n}(y) - F_{X_n}(x) > 1 - \delta,$ para n suficientemente grande.

. . . continuação da prova do Teorema de Slutsky. Defina

$$M = \max\{y, -x\}$$

e note que $Y_n \xrightarrow{P} 0$ implica que

$$P(|Y_n| < \epsilon/M) > 1 - \delta, \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Então, para n grande,

$$1 - 2\delta < P(x < X_n \leq y, |Y_n| < \epsilon/M) \leq P(|X_n Y_n| < \epsilon).$$

Mas isto implica que $X_n Y_n \xrightarrow{P} 0$.

... continuação da prova do Teorema de Slutsky. Para o caso c geral:

$$X_n Y_n = cX_n + (Y_n - c)X_n$$

mas

- $Y_n - c \xrightarrow{P} 0$ então $(Y_n - c)X_n \xrightarrow{P} 0$;
- $g(x) = cx$ é contínua então $cX_n \xrightarrow{D} cX$;
- do anterior e o item (1) segue que $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$.

Para provar (4) note que

$$\frac{1}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{c}$$

e aplique (3).

Bom estudo!