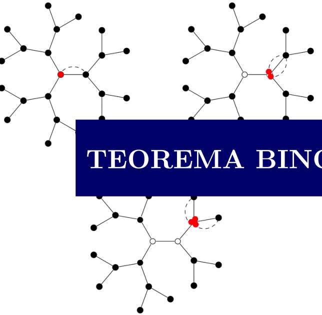
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



TEOREMA BINOMIAL. COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO.

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Conteúdo da Aula 6

- Teorema Binomial e Multinomial.
- Soluções de equações.
- Combinações com repetição.

Teorema Binomial

O teorema é sobre as potências do binômio $(x+y)$. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2,\\ (x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,\\ (x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.\end{aligned}$$

Note que:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{3}x^3+\binom{3}{2}x^2y+\binom{3}{1}xy^2+\binom{3}{0}y^3,$$

e que algo similar acontece nas outras duas expressões!

Teorema Binomial

De modo geral, se queremos calcular o produto

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n \text{ vezes}},$$

note que o resultado estará formado por termos da forma:

$$C_i\, x^i\, y^{n-i}, \text{ para cada } i \in \{0,1,\dots,n\},$$

onde C_i é uma constante. De fato, cada termo desses é obtido de

$$\binom{n}{i}$$

formas diferentes. Isto depende de que fatores, dos $(x+y)'s$, estão vindo os x's.

Teorema Binomial

Acabamos de verificar o seguinte teorema.

Teorema 6.1

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então*

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Exemplo 6.1

Quantos subconjuntos existem em um conjunto de n elementos?

Solução. Seja A tal conjunto e $|A| = n$. Vamos verificar que

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Note que,

$$\mathcal{P}(A) = \bigcup_{i=0}^{n} \{B \subseteq A : |B| = i\},$$

Continuação do Exemplo 6.1. Mas, se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$:

$$
\begin{aligned}
i = 0 \quad &: \quad |\{B \subseteq A : |B| = 0\}| = |\{\emptyset\}| = 1 = \binom{n}{0};\\
i = 1 \quad &: \quad |\{B \subseteq A : |B| = 1\}| = |\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}\}| = n = \binom{n}{1};\\
&\vdots\\
i \text{ geral} \quad &: \quad |\{B \subseteq A : |B| = i\}| = \binom{n}{i};\\
&\vdots\\
i = n \quad &: \quad |\{B \subseteq A : |B| = n\}| = |\{A\}| = 1 = \binom{n}{n}.
\end{aligned}
$$

Continuação do Exemplo 6.1. Isto é,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{P}(A)| &= \left|\bigcup_{i=0}^{n}\{B \subseteq A : |B| = i\}\right| \\
&= \sum_{i=0}^{n} |\{B \subseteq A : |B| = i\}| \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1)^{i}(1)^{n-i} \\
&= (1+1)^{n} \qquad \text{(pelo Teorema Binomial)} \\
&= 2^{n}
\end{aligned}
$$

Teorema Multinomial

O seguinte teorema generaliza o Teorema Binomial.

Teorema 6.2

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{(n_1, \ldots, n_k)} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k},$$

onde a soma é sobre todos os vetores com valores inteiros não negativos $(n_1, \ldots, n_k)$ *tais que*

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Exemplo 6.2

Note que

$$(x+y+z)^2$$

é dado por

$$\binom{2}{2,0,0}x^2y^0z^0+\binom{2}{0,2,0}x^0y^2z^0+\binom{2}{0,0,2}x^0y^0z^2$$

$$+\binom{2}{1,1,0}x^1y^1z^0+\binom{2}{1,0,1}x^1y^0z^1+\binom{2}{0,1,1}x^0y^1z^1$$

donde concluímos que

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Queremos contar o número de soluções inteiras de uma equação da forma

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m. \tag{1}$$

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Exemplo 6.3

Considere a equação

$$x_1 + x_2 = 5.$$

(a) *Quais são as possíveis soluções exigindo que* $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$*?*

(b) *Quais são as possíveis soluções exigindo que* $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$*?*

Solução. Note que:

x_1	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
x_2	$\cdots$	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	$\cdots$

e portanto o número de soluções é infinito no caso de (a). Por outro lado, para (b), se considerarmos $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ temos apenas 4 soluções.

Observação

No que segue vamos exigir: $x_1, x_2, \ldots, x_n, m \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6.4

Consideremos a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11. \tag{2}$$

As soluções para esta equação podem se escrever como quádruplas ordenadas

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

de inteiros positivos tendo soma 11*. Algumas delas são:*

$$(2, 2, 4, 3),\ (1, 8, 1, 1)\ e\ (3, 4, 2, 2).$$

Continuação do Exemplo 6.4. A fim de contarmos todas as soluções da equação escrevemos:

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=11.$$

Agora separamos 11 em quatro parcelas sendo cada uma delas um inteiro positivo. Por exemplo,

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=11.$$

Note que cada forma de escolhermos três dentre os dez sinais "+" que separam os 1's, irá nos fornecer uma solução da equação. A escolha acima corresponde à solução

$$x_1=2,\ x_2=2,\ x_3=4,\ x_4=3.$$

Desta forma o número de soluções é $\binom{10}{3}$.

Equações Lineares com Coeficientes Unitários

Teorema 6.3

O número de soluções nos inteiros positivos da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m, \quad m > 0, \tag{3}$$

é dado por

$$\binom{m-1}{n-1}$$

Prova. Para expressar $m \in \mathbb{N}$ como soma de n elementos de $\mathbb{N}$ basta escolher $n-1$ dos sinais $+$'s da representação

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots + 1 + \cdots + 1 = m.$$

Por exemplo,

$$1 + 1 \mathbf{+} 1 + 1 + 1 \mathbf{+} 1 \mathbf{+} 1 + \cdots + 1 + \ \mathbf{+} 1 \mathbf{+} 1 + 1 + 1 + 1 = m.$$

. . . continuação da prova. Para cada escolha:

$$x_2 = 3$$

$$x_1 = 2 \qquad\qquad x_3 = 1$$

$$1+1 \boldsymbol{+} 1+1+1 \boldsymbol{+} 1 \boldsymbol{+} 1+\cdots+1+ \boldsymbol{+} 1 \boldsymbol{+} 1+1+1+1 = m$$

$$x_{n-1} = 1 \qquad\qquad x_n = 4$$

Como cada distribuição dos $\boldsymbol{+}$'s corresponde a uma única solução para a equação (3), basta contarmos de quantas formas isto pode ser feito. Devemos selecionar $n-1$ dos $m-1$ possíveis $\boldsymbol{+}$'s para dividir os 1's, o que pode ser feito de

$$\binom{m-1}{n-1}$$

formas diferentes.

Exemplo 6.5

Encontrar o número de soluções em $\mathbb{N}$ das seguintes equações:

(a) $x_1 + x_2 = 5$;

(b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$.

Solução. Note que para (a) temos $m = 5$ e $n = 2$, portanto

$$\binom{m-1}{n-1} = \binom{4}{1} = 4,$$

como tínhamos calculado antes. Já para (b) temos $m = 9$ e $n = 5$, temos

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70.$$

Pergunta: E se considerarmos também o 0 no conjunto de possíveis soluções?

- No Exemplo 6.3 a equação $x_1 + x_2 = 5$ tem mais duas soluções das 4 encontradas em $\mathbb{N}$: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ e $x_1 = 5$, $x_2 = 0$.
- Exercício: Considere $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ e encontre o número de soluções desta equação em $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Dica: Faça a mudança de variáveis $y_i = x_i + 1$ e use o Exemplo 6.4.

Em geral, em que temos n variáveis, o número de soluções da equação

$$x_1 + \cdots + x_n = m, \text{ com } x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

é o mesmo que o número de soluções da equação

$$y_1 + \cdots + y_n = m + n, \text{ com } y_i \in \mathbb{N}.$$

Teorema 6.4

O número de soluções nos inteiros não-negativos da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m, \quad m > 0, \tag{4}$$

é dado por

$$\binom{m+n-1}{n-1}.$$

Combinações com repetição

Suponhamos que em uma cafeteria existam 4 tipos de cafes: a, b, c, d e que queremos tomar dois cafés, sendo possível comprar dois iguais. Segue a lista das opções, que são dez.

$$\begin{array}{cccc} aa & bb & cc & dd \\ ab & bc & cd & \\ ac & bd & & \\ ad & & & \end{array}$$

Este número é maior que

$$\binom{4}{2} = 6,$$

pois quando contamos combinações (simples) de 4 tomados 2 a 2, não tomamos o mesmo objeto mais de uma vez. Dizemos que a tabela acima é a lista das combinações com repetição de 4 tomados 2 a 2.

Lembre que as combinações (simples) de 4 objetos tomados 2 a 2 são:

$$\begin{array}{ccc} ab & bc & cd \\ ac & bd & \\ ad & & \end{array}$$

Suponhamos agora que em uma semana vamos comprar 5 cafés. Algumas das possibilidades são:

$$aaaaa, \quad abbbc, \quad aacbb, \quad bbccd.$$

Vamos contar o número de elementos do tipo acima. Se

$$\begin{aligned}
x_1 &: \quad \# \text{ de cafés do tipo } a \text{ comprados na semana;}\\
x_2 &: \quad \# \text{ de cafés do tipo } b \text{ comprados na semana;}\\
x_3 &: \quad \# \text{ de cafés do tipo } c \text{ comprados na semana;}\\
x_4 &: \quad \# \text{ de cafés do tipo } d \text{ comprados na semana;}
\end{aligned}$$

então o número procurado é o número de soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ de:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$

que é dado por $\binom{8}{3} = 56$, e denotamos isto por $CR_{4,5}$.

Combinações com repetição

De forma geral, $CR_{n,k}$, é o número de formas de selecionarmos k objetos dentre n objetos distintos onde cada objeto pode ser selecionado até k vezes. Isto pode ser pensado como o número de soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ da equação:

$$x_1 + \cdots + x_n = k,$$

que é igual a

$$\binom{n+k-1}{n-1} \quad \text{ou} \quad \binom{n+k-1}{k}.$$

Logo $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

Exemplo 6.6

De quantos modos podemos diferentes podemos distribuir 10 *bombons idênticos em* 4 *caixas diferentes?*

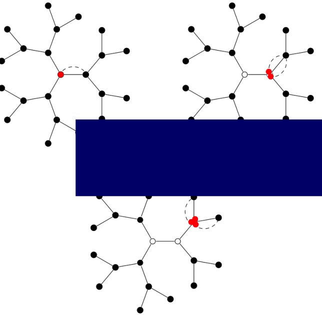
Solução. $CR_{4,10}$ (explique!)

Referências e exercícios sugeridos!

- Morgado, Carvalho, Carvalho, Fernandez. Analise combinatoria e probabilidade. SBM, 1991.
- Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 1 (Ross):
  - 1.24, 1.26, 1.31 (pág. 33);
  - 1.14 (pág. 37).



Bom estudo!