

## Lista de exercícios 2

PGE950 - Probabilidade | PPGE - UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

1º Semestre de 2020

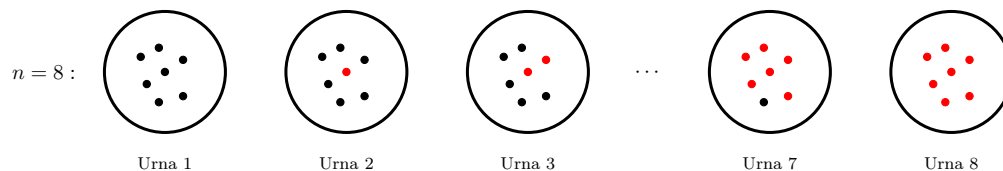
---

**Primeiros exercícios.** Realize os exercícios 30, 42, 49 e 51, páginas 32 a 35, de Exercícios de Probabilidade de Lebensztayn (livro disponível em <https://www.ime.unicamp.br/~lebensztayn/livro/livro.html>).

No que segue  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  denota um espaço de probabilidade. Isto é,  $\Omega$  é um conjunto não-vazio,  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  e  $P$  é uma probabilidade em  $\mathcal{F}$ .

### Exercícios:

1. Se  $A, B, C \in \mathcal{F}$  prove que:  $P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap C^c)P(C^c|B)$ .
2. Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores. Se  $A =$ “soma dos números é 5” encontre um evento  $B$  tal que  $P(A|B) = P(A)$ .
3. (Problema do pareamento) Suponha que cada uma das  $n$  pessoas presentes em uma festa atire seu chapéu para o centro da sala. Os chapéus são misturados e depois cada pessoa seleciona ao acaso um deles. Se  $A =$ “pelo menos uma das  $n$  pessoas seleciona seu próprio chapéu”, mostre que  $P(A) \geq \frac{1}{2}$ .
4. Seja  $B \in \mathcal{F}$  com  $P(B) > 0$  e defina  $P_B : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  é definida por  $P_B(A) := P(A|B)$ , para todo  $A \in \mathcal{F}$ . Mostre que  $P_B$  é uma probabilidade em  $\mathcal{F}$  (i.e. verifique que os axiomas da probabilidade são satisfeitos para  $P_B$ ).
5. Considere  $n$  urnas sendo que a  $i$ -ésima urna contém  $i - 1$  bolas vermelhas e  $n - i$  bolas pretas,  $i \in \{1, \dots, n\}$ :



Escolha uma urna ao acaso e, da urna escolhida, retire ao acaso e sem reposição duas bolas. Considere os eventos

$A =$  “as bolas retiradas são de cores diferentes”,

$U_i =$  “a urna  $i$  é escolhida”,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$V_i =$  “a  $i$ -ésima bola retirada é vermelha”,  $i \in \{1, 2\}$ .

(a) Mostre que  $P(V_1) = P(V_1^c)$ .

(b) Mostre que

$$P(V_1 \cap V_2^c) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (i-1)(n-i).$$

(c) Use o item anterior<sup>1</sup> para provar que  $P(A) = 1/3$ .

---

### ENTREGAR

os exercícios 1, 3 e 5 por e-mail ou por WhatsApp, escrito à mão, até o dia 19/06.

---

<sup>1</sup>Dica: use a identidade combinatória  $\sum_{i=1}^n i(i-1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)$ .