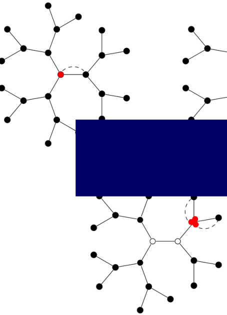
ET658 - Processos Estocásticos para Atuária

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



Distribuição estacionária

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et658-processos-estocasticos

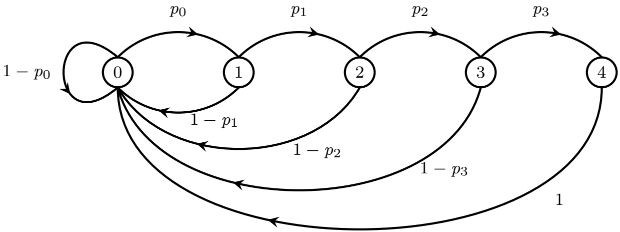
Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

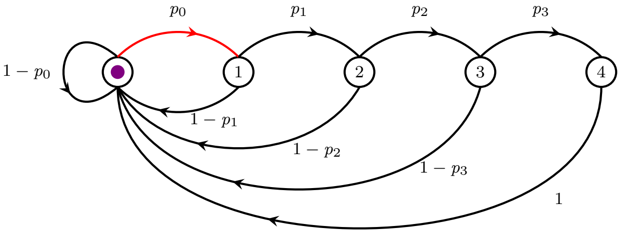
Conteúdo da Aula 10

- Distribuição estacionária.
- Convergência à distribuição estacionária.

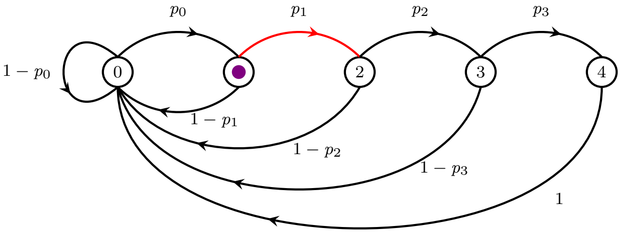
Motivação



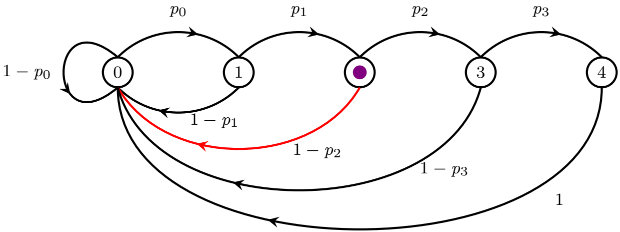
Motivação



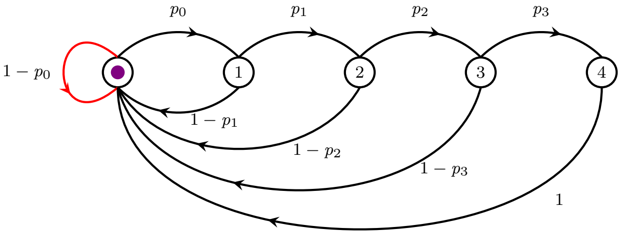
Motivação



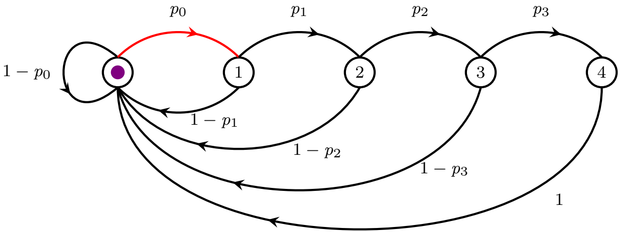
Motivação



Motivação



Motivação



Pergunta: qual é a probabilidade de que a partícula esteja em 0*,*

... após um número grande n *de passos?*

Distribuição estacionária

Questão: Dada uma C.M.T.D. $(X_n)_{n\geq 0}$ iremos procurar condições sob as quais a cadeia tem um "equilíbrio" em termos de distribuição!

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma C.M.TD. com espaço de estados $\mathcal{S}$ e probabilidades de transição $p(i,j)$, $i,j\in\mathcal{S}$. Uma distribuição de probabilidades $\pi=(\pi(i))_{i\in\mathcal{S}}$ é uma distribuição estacionária para a cadeia se

$$\sum_{i\in\mathcal{S}}\pi(i)p(i,j)=\pi(j),\quad \text{para todo } j\in\mathcal{S}.$$

Observação

Note que $\sum_{i\in\mathcal{S}}\pi(i)=1.$

Se π é distribuição estacionária e $X_0 \sim \pi$; isto é:

$$P(X_0 = i) = \pi(i), \text{ para todo } i \in \mathcal{S},$$

então $X_n \sim \pi$ para todo $n \geq 1$. De fato, para $j \in \mathcal{S}$ vale que

$$\begin{aligned} P(X_1 = j) &= \sum_{i \in \mathcal{S}} P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i), \\ &= \sum_{i \in \mathcal{S}} p(i,j)\pi(i), \\ &= \pi(j). \end{aligned}$$

Assim $X_1 \sim \pi$. Analogamente, e por indução, podemos verificar que $X_n \sim \pi$, para todo $n \geq 1$.

Em outras palavras, se π é distribuição estacionária da cadeia e

$$P(X_0 = i) = \pi(i), \text{ para todo } i \in \mathcal{S},$$

então, para todo $n \geq 1$ vale que:

$$P(X_n = i) = \pi(i), \text{ para todo } i \in \mathcal{S},$$

Exemplo 10.1

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ *com espaço de estados* $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ *e matriz de transição dada por*

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Se π *é distribuição estacionária para esta cadeia então satisfaz:*

$$\begin{cases} \pi(0) & = & (1/2)\pi(0) + (1/5)\pi(1), \\ \pi(1) & = & (1/2)\pi(0) + (4/5)\pi(1), \end{cases}$$

junto com $\pi(0) + \pi(1) = 1$. *Neste caso, a solução é:*

$$\pi = (\pi(0), \pi(1)) = (2/7, 5/7).$$

Exemplo 10.2

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma C.M.T.D. com* $\mathcal{S} = \{0,1,2,3,4\}$ *e*

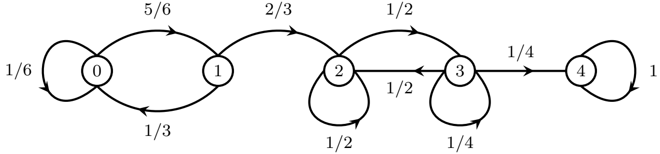
$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se π *é distribuição estacionária para esta cadeia, então* π *satisfaz:*

$$\begin{cases} \pi(0) = (1/6)\pi(0) + (1/3)\pi(1), \\ \pi(1) = (5/6)\pi(0), \\ \pi(2) = (2/3)\pi(1) + (1/2)\pi(2) + (1/2)\pi(3), \\ \pi(3) = (1/2)\pi(2) + (1/4)\pi(3), \\ \pi(4) = (1/4)\pi(3) + \pi(4). \end{cases}$$

... junto com $\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) = 1.$

. . . continuação do Exemplo ??. Neste caso $\pi = (0, 0, 0, 0, 1)$. Note que:



Existem três clases:

- $\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}$ (transiente),
- $\mathcal{C}_2 = \{2, 3\}$ (transiente) e
- $\mathcal{C}_3 = \{4\}$ (recorrente).

É natural pensar que $P(X_n = 4) = 1$ para valores grandes de n?

Unicidade

Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma C.M.T.D. irredutível e recorrente. Se π_1 e π_2 são distribuições estacionárias para a cadeia então $\pi_1(i) = \pi_2(i)$, para todo $i \in \mathcal{S}$.

Proposição 10.1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma C.M.T.D e* π *uma distribuição estacionária para a cadeia. Se* $i \in \mathcal{S}$ *é tal que* $\pi(i) > 0$, *então* i *é recorrente.*

Convergência para uma distribuição estacionária

Suponha que uma C.M. tem uma única distribuição estacionária π.

Questão: Quando podemos garantir que

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j | X_0 = i) = \pi(j), \text{ para todo } j \in \mathcal{S}?$$

Note que isto é equivalente a garantir que:

$$P(X_n = j | X_0 = i) \approx \pi(j).$$

Período

Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, com $\mathcal{S}$ e $p(i,j)$. Seja j um estado recorrente e seja:

$$I_j := \{n \geq 1 : p_n(j,j) > 0\}.$$

Isto é I_j é o conjunto formado pelos tempos tais que $p_n(j,j) > 0$. Denotamos por d_j o máximo comum divisor de I_j e dizemos que d_j é o período de j.

Proposição 10.2

Todos os estados de uma mesma classe recorrente têm o mesmo período.

Observação

Dizemos que uma classe de período 1 é aperiódica.

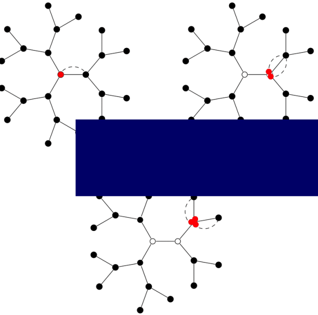
Teorema 10.1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma C.M.T.D irredutível, aperiódica e recorrente. Suponha que a cadeia tem uma distribuição estacionária* π*. Então, para todo* $i, j \in \mathcal{S}$ *temos que*

$$\lim_{n\to\infty} p_n(i,j) = \pi(j).$$

Referência!

Ross, S. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010.



Bom estudo!