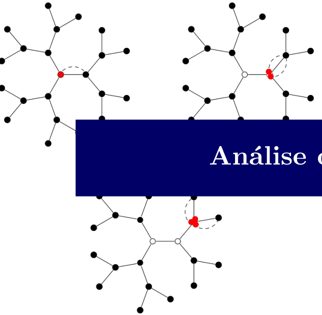
ET658 - Processos Estocásticos para Atuária

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



Análise do primeiro passo e a ruína do jogador

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et658-processos-estocasticos

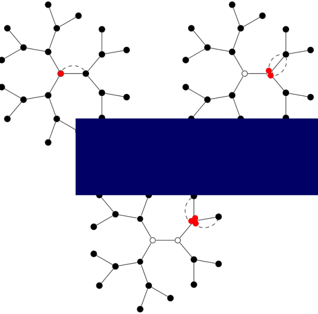
Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 9

- Análise do primeiro passo: exemplos.
- O problema da ruína do jogador.



A ruína do jogador

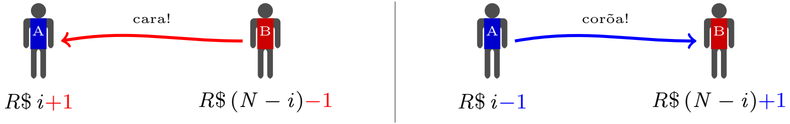
Problema

Dois jogadores, A e B, realizam apostas aos resultados de sucessivos lançamentos de uma moeda que, em cada lançamento, tem probab. $p \in (0,1)$ de dar cara, independentemente dos outros lançamentos.

$R\$\, i$ $\qquad$ $R\$\,(N-i)$

Problema

Dois jogadores, A e B, realizam apostas aos resultados de sucessivos lançamentos de uma moeda que, em cada lançamento, tem probab. $p \in (0,1)$ de dar cara, independentemente dos outros lançamentos.



Qual é a probabilidade de que A ganhe o jogo?

Nota!

Proposto por Pascal a Fermat em 1656. Esta versão foi proposta por Huygens em 1657. Para uma revisão da história do problema e das soluções de Pascal, Fermat e Huygens, ver o artigo de Edwards, Pascal's Problem: The "Gambler's Ruin", Int. Stat. Rev. **51** *n.1 (1983), 73-79.*

A solução

Vamos verificar que esta probabilidade é dada por:

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{1 - (\{1-p\}/p)^i}{1 - (\{1-p\}/p)^N}, & \text{si } p \neq 1/2, \\ i/N, & \text{si } p = 1/2, \end{cases}$$

para $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

Solução do problema da ruína do jogador: Considere os evento

$$A_i = \text{"o jogador } A \text{ vence o jogo sendo que inicia com } i \text{ reais"};$$

e defina $p_i := P(A_i)$, $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Note que $p_0 = 0$ e que $p_N = 1$.

Além disto, para $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, se

$$C = \text{"o primeiro lançamento resulta em cara"}$$

vale que

$$p_i = P(A_i) = P(A_i|C)P(C) + P(A_i|C^c)P(C^c).$$

Como $P(A_i|C) = P(A_{i+1}) = p_{i+1}$ e $P(A_i|C^c) = P(A_{i-1}) = p_{i-1}$:

$$p_i = p\, p_{i+1} + q\, p_{i-1},$$

onde usamos $q := 1 - p$. Logo:

$$p_{i+1} - p_i = \left(\frac{q}{p}\right)(p_i - p_{i-1}).$$

... continuação: Conseguimos

$$\begin{aligned}
p_{i+1} - p_i &= \left(\frac{q}{p}\right)(p_i - p_{i-1}) \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)\left\{\left(\frac{q}{p}\right)(p_{i-1} - p_{i-2})\right\} \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^2 (p_{i-1} - p_{i-2}) \\
&= \vdots \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^i (p_1 - p_0),
\end{aligned}$$

e como $p_0 = 0$, então para $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ vale que

$$p_{i+1} = p_i + \left(\frac{q}{p}\right)^i p_1.$$

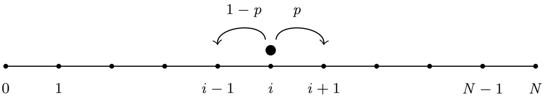
... continuação: Assim

$$p_{i+1} = \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{q}{p}\right)^k p_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{1-(q/p)^{i+1}}{1-q/p}\right) p_1, & \text{se } q \neq p, \\ (i+1)p_1, & \text{se } q = p. \end{cases}$$

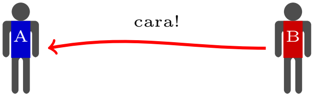
O resultado segue após encontrar p_1 a partir de $p_N = 1$ (isolando p_1).

A ruína do jogador como um passeio aleatório

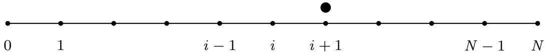
$R\$\, i$ $\qquad\qquad$ $R\$\,(N-i)$



A ruína do jogador como um passeio aleatório



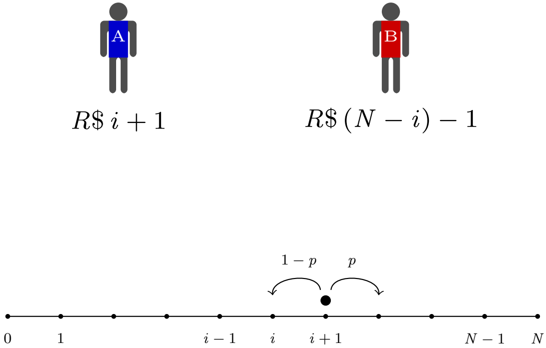
$R\$ \, i+1$ $\qquad$ $R\$ \, (N-i)-1$



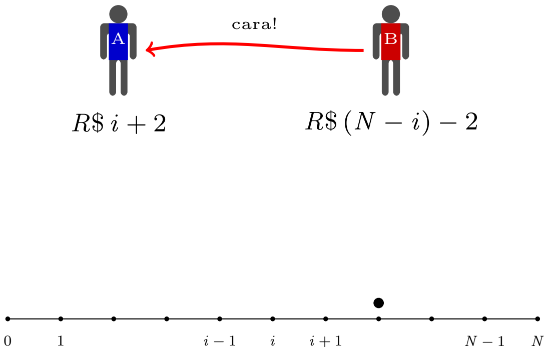
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

A ruína do jogador como um passeio aleatório



A ruína do jogador como um passeio aleatório



No contexto do passeio aleatório ...

Dado que a partícula começa em i:

$$A_i = \{\text{a partícula atinge } N \text{ antes que } 0\}.$$

Lembremos que, se $q = 1 - p$, então:

$$P(A_i) = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}, & \text{si } q \neq p, \\ i/N, & \text{si } q = p, \end{cases}$$

para $i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$.

A cadeia de Markov da ruína do jogador

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ tal que

$$X_n = \text{fortuna do jogador } A \text{ logo após o } n-\text{ésimo lançamento.}$$

Então o problema da ruína do jogador pode ser estudando a partir da CMTD, $(X_n)_{n\geq 0}$, com espaço de estados

$$\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$$

e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = \begin{cases} p, & \text{para } i \in \{1, \ldots, N\} \text{ e } j = i+1; \\ 1-p, & \text{para } i \in \{1, \ldots, N\} \text{ e } j = i+1; \\ 1, & \text{para } i = j = N \text{ ou } i = j = 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A cadeia de Markov da ruína do jogador

De fato, lembre que se τ_k denota o primeiro instante em que a cadeia visita o estado k; isto é,

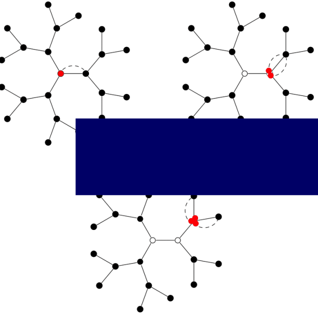
$$\tau_k = \inf\{n \geq 0 : X_n = k\},$$

então, o que fizemos foi usar a análise do primeiro paso para encontrar:

$$P(\tau_n < \tau_0 | X_0 = i).$$

Referência!

Ross, S. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010.



Bom estudo!