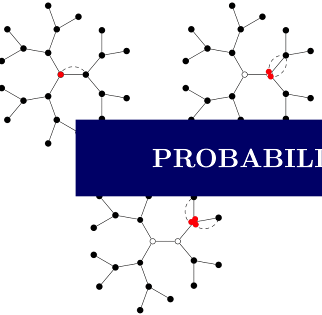
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



PROBABILIDADE: PROPRIEDADES E EXEMPLOS

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 10

- Probabilidade.
  - Propriedades;
  - Exemplos.

Definição axiomática de probabilidade

A função $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma probabilidade se:

Axioma 1. $P(A) \geq 0$ para todo $A \subset \Omega$.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. Se $A_i \subset \Omega$, $i \in \mathbb{N}$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Propriedades

1. $P(\emptyset) = 0$.

   - Prova: Note que, fazendo $A_1 = \Omega$ e $A_i = \emptyset$ para todo $i \geq 2$:

     $$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{\textbf{A3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset),$$

     donde resulta que

     $$\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$$

     e portanto $P(\emptyset) = 0$.

Observação

Se $A_1, \ldots, A_n$ são mutuamente exclusivos então $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Propriedades

2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   - *Prova:* $1 \overset{\mathbf{A2}}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A) + P(A^c)$.

3. Se $A_1 \subset A_2$ então $P(A_1) \leq P(A_2)$.

   - *Prova:* Como $A_1 \subset A_2$ então $A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$. Logo,

$$P(A_2) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1) + \underbrace{P(A_2 \cap A_1^c))}_{\geq 0 \text{ por } \mathbf{A1}} \geq P(A_1).$$

Propriedades

4. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

- *Prova:* Resulta de observar que

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c), \quad A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap A_1^c),$$

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2).$$

Isto implica:

$$P(A_1) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2^c), \tag{1}$$

$$P(A_2) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c), \tag{2}$$

$$P(A_1 \cup A_2) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2^c) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2). \tag{3}$$

Logo, de (3)

$$P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) \qquad\qquad P(A_2) - P(A_2 \cap A_1)$$

(1) (2)

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \cap A_2^c) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2)$$

. . . e concluímos o resultado:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Fórmula de inclusão-exclusão:

Em geral, para n eventos $A_1, \ldots, A_n$ temos:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\
&(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).
\end{aligned}
$$

Consequência: Note que sempre vale que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Exemplo 10.1

Uma pessoa recebe dois livros. A probabilidade dela gostar do primeiro livro é $0,5$, de gostar do segundo livro é $0,4$ e de gostar de ambos os livros é $0,3$. Qual é a probabilidade de que ela não goste de nenhum dos livros?

Solução: Considere os eventos

$$A_i = \text{“a pessoa gosta do } i - \text{ésimo livro“},$$

para $i \in \{1,2\}$. Queremos saber $P(A_1^c \cap A_2^c)$. Mas note que

$$P(A_1^c \cap A_2^c) = P\left(\{A_1 \cup A_2\}^c\right) = 1 - P\left(A_1 \cup A_2\right).$$

Por outro lado,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0,5 + 0,4 - 0,3 = 0,6.$$

Portanto, $P(A_1^c \cap A_2^c) = 1 - 0,6 = 0,4.$

Exemplo 10.2

Uma urna contém n bolas, uma das quais é especial. Se k dessas bolas são retiradas uma de cada vez, e se todas as bolas na urna têm a mesma probabilidade de serem retiradas, qual é a probabilidade de a bola especial ser escolhida?

Solução: Note que estamos com um espaço amostral finito cujos resultados simples são equiprováveis. Então:

$$P(\text{selecionar a bola especial}) = \frac{\#\text{ casos favoráveis}}{\#\text{ casos possíveis}} = \frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}.$$

Outra solução do Exemplo 10.2: Considere os eventos:

$$A_i = \text{“a bola especial é a } i - \text{ésima bola a ser escolhida”},$$

para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Mas como cada bola tem a mesma probabilidade de ser a i-ésima a ser escolhida, temos que

$$P(A_i) = \frac{1}{n},$$

e como os eventos são mutuamente exclusivos, então

$$P(\text{selecionar a bola especial}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \frac{k}{n}.$$

Observação

$$P(A_i) = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)(1)(n-i)\cdots(n-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Exemplo 10.3

Um número entre 1 *e* 300 *é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que ele seja divisível por* 3 *ou por* 5.

Solução: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 300\}$ e $P(\omega) = \dfrac{1}{300}$, para cada $\omega \in \Omega$. Seja:

$$A = \text{“o número escolhido é divisível por 3”},$$

$$B = \text{“o número escolhido é divisível por 5”}.$$

Queremos calcular $P(A \cup B)$. Os números entre 1 e 300 divisíveis por:

- 3 são $\lfloor 300/3 \rfloor = 100$;
- 5 são $\lfloor 300/5 \rfloor = 60$;
- 3 e 5 são $\lfloor 300/15 \rfloor = 20$.

Então $P(A) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}$ e $P(A \cap B) = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$, e

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15} \approx 0,467.$$

Exemplo 10.4

Um torneio é disputado por 4 times: A, B, C e D. É 3 vezes mais provável que A vença do que B, 2 vezes mais provável que B vença do que C e 3 vezes mais provável que C vença do que D. Quais as probabilidades de ganhar para cada um dos times?

Solução: Se A, B, C e D representam os eventos de que o time A, B, C e D, respectivamente, vença, e se fazemos $p = P(D)$, então:

- $P(C) = 3P(D) = 3p$,
- $P(B) = 2P(C) = 2(3p) = 6p$
- $P(A) = 3P(B) = 3(6p) = 18p$.

Por outro lado, note que $\Omega = \{A, B, C, D\}$ e como $P(\Omega) = 1$ então:

$$1 = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 18p + 6p + 3p + p = 28p.$$

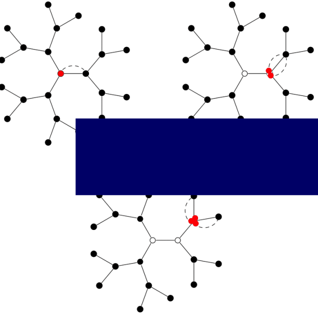
Portanto, $p = \frac{1}{28}$ e assim encontramos as probabilidades de interesse!

Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Atividade:

- Capítulo 2 (Ross): Estudar os exemplos: 5e, 5f, 5h, 5i.



Bom estudo!

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza