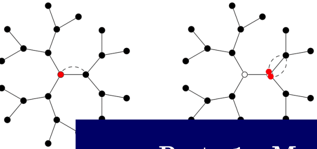
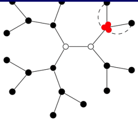
Introducción a los modelos probabilísticos en grafos

24 y 26/10/2023 - Dep. de Ciencia de la Computación - UCSP, Arequipa, Perú



Parte 1 - Modelos probabilísticos y paseos aleatorios en grafos



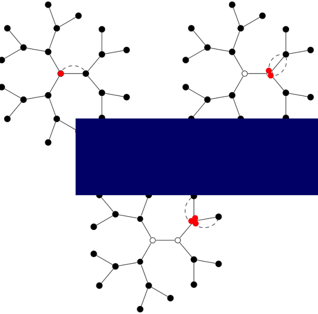
Prof. Dr. Pablo M. Rodriguez
Departamento de Estatística - UFPE
https://www.pablo-rodriguez.org/

Universidade Federal de Pernambuco

Universidad Católica San Pablo

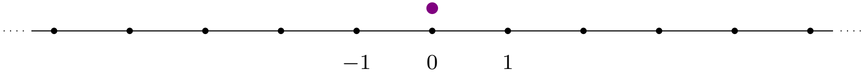
Organización del curso

- Motivación: modelos probabilísticos.
- Revisión de probabilidad y variables aleatorias.
- Breve introducción a las cadenas de Markov a tiempo discreto.
- Paseos aleatorios: recurrencia y transitoriedad.
- Procesos de ramificación: supervivencia y extinción.
- Modelos de percolación.
- Tópicos especiales.

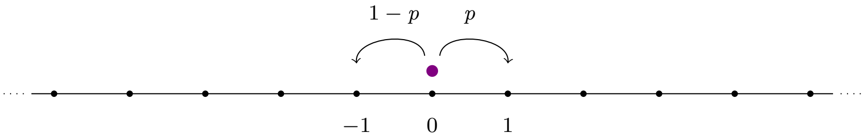


Motivación!

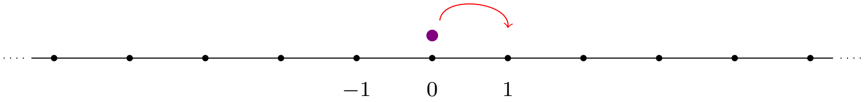
El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



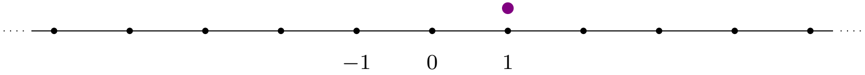
El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



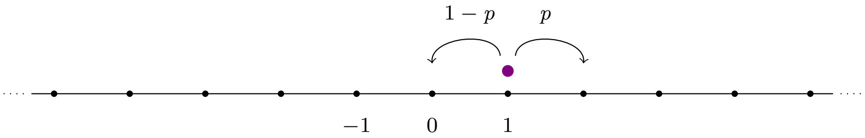
El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



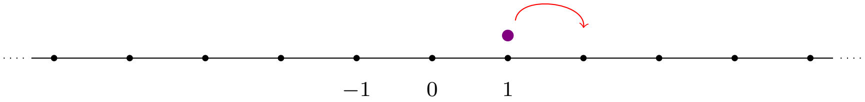
El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



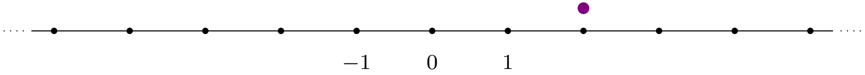
El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



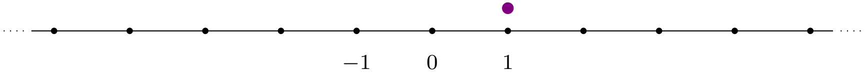
El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



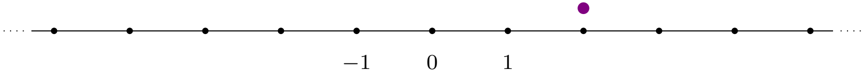
El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



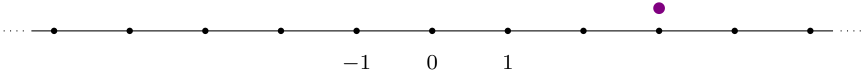
El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$

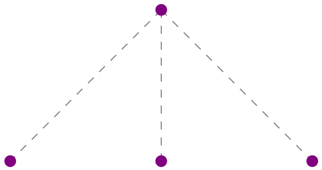


¿Hay alguna chance de que la partícula nunca vuelva al punto de partida?

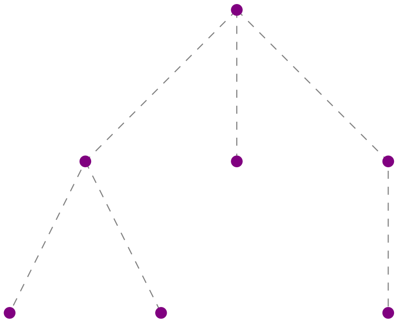
Universidade Federal de Pernambuco
Universidad Católica San Pablo

Proceso de ramificación

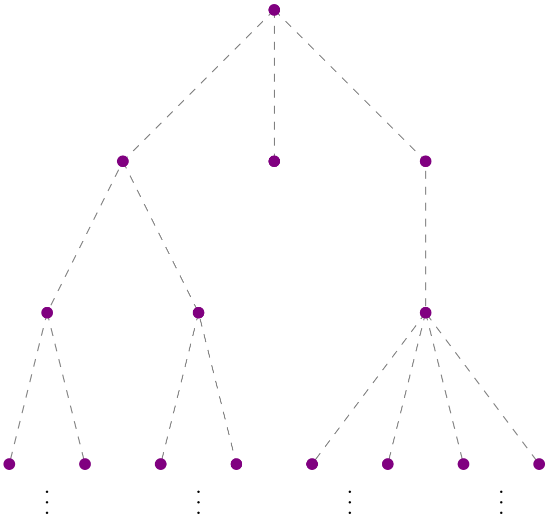
Proceso de ramificación



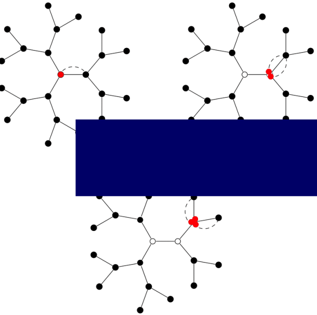
Proceso de ramificación



Proceso de ramificación



¿El proceso continuará sin parar, o no?



Probabilidad

Universidade Federal de Pernambuco

Universidad Católica San Pablo

Espacio de probabilidad: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

conjunto arbitrario $\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P}(\Omega) \text{ es el conjunto} \\ \text{de partes de } \Omega \end{array} \right\}$

$$P : \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{F} \\ A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F} \\ A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1 \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{array} \right\}$$

medida de probabilidad

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A) > 0 \\ P(\Omega) = 1 \\ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{array} \right\}$$

(para $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$)

σ-álgebra de subconjuntos de Ω

Universidade Federal de Pernambuco — Universidad Católica San Pablo

Propiedades

A seguir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es espacio de probabilidad y $A, A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$.

1. $P(\emptyset) = 0$.
   - *Prueba:* Note que $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) \overset{\mathbf{A3}}{=} 2P(\emptyset)$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
   - *Prueba:* $1 \overset{\mathbf{A2}}{=} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A) + P(A^c)$.
3. Se $A_1 \subset A_2$ entonces $P(A_1) \leq P(A_2)$.
   - *Prueba:* Como $A_1 \subset A_2$ entonces $A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)$. Luego,

$$P(A_2) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c)) \overset{\mathbf{A3}}{=} P(A_1) + \underbrace{P(A_2 \cap A_1^c)}_{\geq 0 \text{ por } \mathbf{A1}} \geq P(A_1).$$

Propiedades

4. $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

   - *Prueba:* Resulta de observar que

$$P(A_1) \stackrel{\textbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2^c),$$

$$P(A_2) \stackrel{\textbf{A3}}{=} P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c), e$$

$$P(A_1 \cup A_2) \stackrel{\textbf{A3}}{=} P(A_1 \cap A_2^c) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2).$$

Fórmula de inclusión-exclusión:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\ &(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \end{aligned}$$

Prueba: por inducción!

Propiedades

5. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

- *Prueba:* Vamos a reescribir $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ como una unión de eventos mutuamente exclusivos. Sea $B_1 := A_1$ y para cada $i \geq 2$ defina:

$$B_i := A_i \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right\}^c.$$

Así, $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{\mathbf{A3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

por construcción de los B_i! verifique!

Sucesiones monótonas de eventos

Decimos que una sucesión de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es:

(i) no-decreciente, denotamos por $A_n \nearrow$, si

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$$

En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{o sea} \quad A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(ii) No-creciente, denotamos por $A_n \searrow$, se

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$$

En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{o sea} \quad A_n \searrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Continuidad de la probabilidad

Teorema 2.1

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de eventos aleatorios.*

(i) *Si* $A_n \nearrow$ *entonces*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(i) *Si* $A_n \searrow$ *entonces*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Prueba del Teorema 2.1 (i). Suponga que $A_n \nearrow$, sea $B_1 := A_1$ y

$$B_n := A_n \cap A_{n-1}^c \text{ para todo } n \geq 2.$$

De esta forma $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Luego,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\
&\overset{\textbf{A3}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ P(A_1) + \sum_{i=2}^{n} (P(A_i) - P(A_{i-1})) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}$$

Observación

Para (ii) note que $A_n \searrow$ implica que $A_n^c \nearrow$. Después use (i).

Probabilidad condicional

Recuerde!

A seguir se considera un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Sea $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) > 0$.

A probabilidad condicional de A dado B es definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Observación

Sea $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) > 0$. Si $P_B : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ es definida por

$$P_B(A) := P(A|B),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$ entonces P_B es una probabilidad en $\mathcal{F}$. De hecho:

- Verifique **A1** y **A2** para P_B.
- **A3** vale pues si $A_n \in \mathcal{F}$, para $n \in \mathbb{N}$, y $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \bigcap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{A_n \cap B\}\right)}{P(B)}.$$

Luego

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n).$$

Teorema de la multiplicación

Si $A_i \in \mathcal{F}$, *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *entonces,*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Observación

Para $A, B \in \mathcal{F}$ *el teorema dice que* $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

Prueba del teorema: Por inducción en n. Verificado para $n = 2$, note que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_n \cap \left\{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Teorema da probabilidad total

Si $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, *y la sucesión forma una partición de* Ω, *entonces*

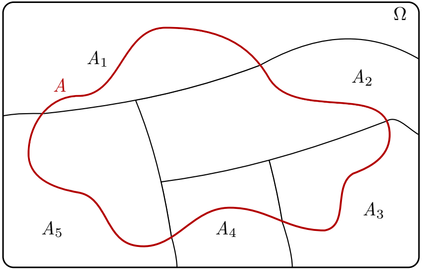
$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$.

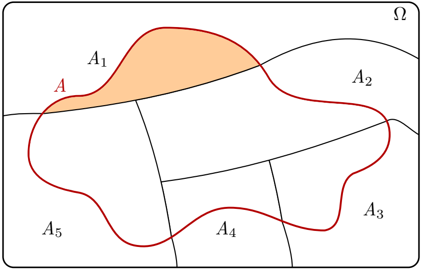
Observación

Para una partición formada por n *eventos aleatorios, el resultado se obtiene haciendo* $A_i = \emptyset$ *para todo* $i > n$.

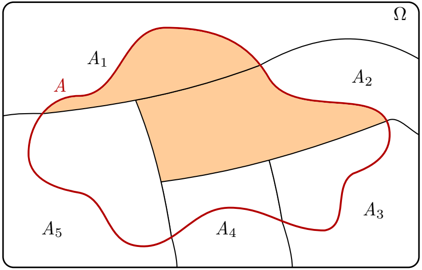
Prueba del Teorema de la probabilidad total:



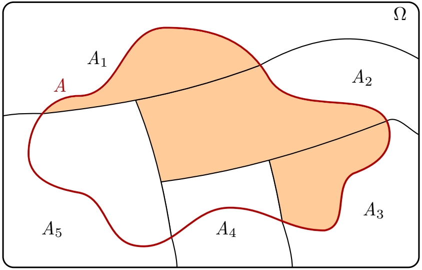
Prueba del Teorema de la probabilidad total:



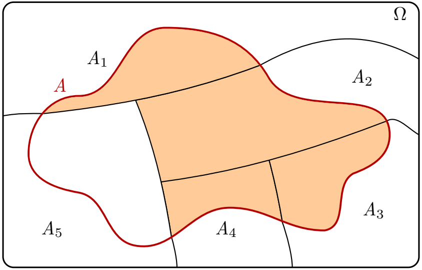
Prueba del Teorema de la probabilidad total:



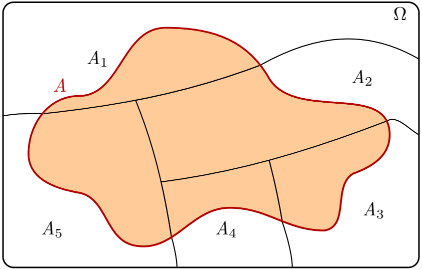
Prueba del Teorema de la probabilidad total:



Prueba del Teorema de la probabilidad total:



Prueba del Teorema de la probabilidad total:



Como $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una partición de Ω, entonces $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{A \cap A_i\}$ y la unión es sobre eventos mutuamente exclusivos. Luego,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{A \cap A_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i).$$

Teorema de Bayes

Si $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, y la sucesión forma una partición de Ω, entonces para todo $A \in \mathcal{F}$ vale que

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|A_i)P(A_i)},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Prueba. Note que:

aplique T. de la multiplicación!

$$P(A_i|A) = \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)}$$

aplique T. de la probabilidad total!

Universidade Federal de Pernambuco

Universidad Católica San Pablo

Independencia

Sea $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$.

Los eventos aleatorios A y B son independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observación

Si $A \in \mathcal{F}$ *y* $P(A) \in \{0, 1\}$ *entonces* A *es independiente de* B *para todo* $B \in \mathcal{F}$.

Universidade Federal de Pernambuco

Universidad Católica San Pablo

De forma general

- Los eventos aleatorios $A_1, \ldots, A_n$ son independientes si:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

  para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$ y $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de eventos independientes si:

$$A_1, \ldots, A_n \text{ son independientes para todo } n \geq 2.$$

Observación

No confundir con sucesiones de eventos independientes 2 a 2, para las cuales vale apenas que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ *si* $i \neq j$.

Variables aleatorias

Una variable aleatoria X es una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

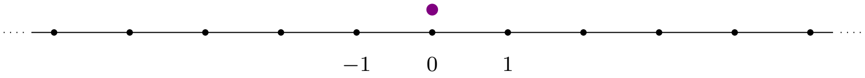
Observación!

Usamos la siguiente notación: $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Universidad Católica San Pablo

El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



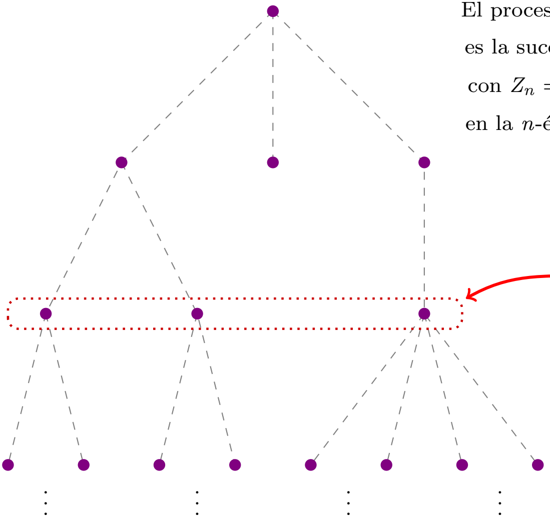
El paseo aleatorio es la sucesión

$$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

denotada $(X_n)_{n \geq 0}$, con X_n = posición de la partícula después del n-ésimo salto.

Proceso de ramificación

El proceso de ramificación es la sucesión $(Z_n)_{n \geq 0}$, con $Z_n = \#$ de partículas en la n-ésima generación.



2da generación

Tipos de variables aleatorias

Una variable aleatoria X es:

- discreta si $X(\omega) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ para todo $\omega \in \Omega$, para algún conjunto $\mathcal{S}$ finito o numerable. En este caso

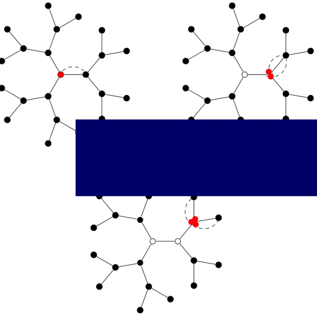
$$p(i) := P(X = i), i \in \mathcal{S},$$

es la función de probabilidad de X.

- (absolutamente) continua si existe $f(x) \geq 0$ tal que

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En este caso f es la función densidad de probabilidad de X.



Modelos básicos

Distribución Bernoulli

X tiene *distribución de Bernoulli* con parámetro $p \in (0,1)$ si:

$$p(1) = p = 1 - p(0).$$

Notación: $X \sim Bernoulli(p)$.

Observación!

Un experimento con apenas dos resultados posibles, suceso o fracaso, se llama ensayo de Bernoulli.

Ejemplo 2.1

Sea X la variable aleatoria indicadora del evento A con $P(A) = p$:

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{si } A \textit{ ocurre,} \\ 0, & \textit{si } A \textit{ no ocurre.} \end{cases}$$

entonces $X \sim Bernoulli(p)$.

Distribución Binomial

X tiene *distribución Binomial* con parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0,1)$ si:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Notación: $X \sim B(n, p)$.

Observación!

X es interpretada como el número de sucesos obtenidos cuando n ensayos independientes de Bernoulli, con probabilidad de suceso p, son realizados.

Observación!

Dos variables aleatorias X_1 e X_2 son independientes si para todo $B_1 \in \mathcal{B}$ y $B_2 \in \mathcal{B}$, los eventos aleatorios $\{X_1 \in B_1\}$ y $\{X_2 \in B_2\}$ son independientes.

Note que, para $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, por ejemplo la configuración

$$\sigma : \underset{1}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{2}{\underline{\times}} \quad \underset{3}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{4}{\underline{\times}} \quad \underset{5}{\underline{\checkmark}} \quad \cdots\cdots \quad \underset{n-3}{\underline{\times}} \quad \underset{n-2}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{n-1}{\underline{\times}} \quad \underset{n}{\underline{\checkmark}}$$

i sucesos (✔)

$n - i$ fracasos (✖)

es favorable para la ocurrencia de $\{X = i\}$. Como tenemos $\binom{n}{i}$ formas diferentes de obtener una configuración de estas e como

$$P(\sigma) = p^i (1-p)^{n-i},$$

por independencia!

concluímos que

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Si $X \sim B(n, p)$ podemos escribir

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

en que $X_1, \ldots, X_n$ son i.i.d. con $X_1 \sim Bernoulli(p)$.

Observación!

La notación i.i.d. es usada para decir que las variables son independientes e idénticamente distribuidas.

Distribución de Poisson

X tiene *distribución de Poisson* con parámetro $\lambda \in (0, \infty)$ si:

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Notación: $X \sim Poisson(\lambda)$.

Observación!

X puede ser interpretada como una aproximación para el número de sucesos obtenidos cuando n ensayos independientes de Bernoulli, con probabilidad de suceso p, son realizados, asumiendo valores grandes de n e pequeños de p.

Aproximación de la Binomial para la Poisson

Sea $X \sim B(n,p)$, n grande, y sea $Y \sim Poisson(\lambda)$ con $\lambda = np$.

$$P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

que podemos reescribir:

$$P(X=i) = \left\{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\{i-1\})}{n^i}\right\}\left(\frac{\lambda^i}{i!}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i}.$$

Aproximación de la Binomial para la Poisson

Como

$$1 - \frac{j}{n} \approx 1, \;\; \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \;\; \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1,$$

concluimos que

$$P(X = i) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = P(Y = i).$$

Distribución Geométrica

X tiene *distribución geométrica* con parámetro $p \in (0,1)$ si:

$$p(i) = p(1-p)^{i-1}, \text{ para } i \in \mathbb{N}.$$

Notación: $X \sim Geom(p)$.

Observación!

X es interpretada como el número de ensayos independientes de Bernoulli, con probabilidad de suceso p, que deben ser realizados hasta obtener el primer suceso.

Pensando en la interpretación de X, note que si

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si el } i\text{-ésimo ensayo resulta en suceso,} \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces:

$$P(X = i) = P\left(\left\{\bigcap_{k=1}^{i-1} \{X_k = 0\}\right\} \cap \{X_i = 1\}\right) = (1-p)^{i-1}p.$$

por independencia!

Problema de la colección de cupones

Asuma que haya n tipos de cupones y que cada vez que un cupón es conseguido, este tiene la misma probabilidad de ser de cualquier tipo. Los cupones se coleccionan de a uno por vez. Si X es el número de cupones que precisan ser coleccionados hasta obtener una colección completa de al menos un cupón de cada tipo, entonces:

$$X = \sum_{i=1}^{n} T_i,$$

donde $T_1, T_2, \ldots, T_n$ son variables aleatorias independientes con

$$T_i \sim Geom\left(\frac{n-i+1}{n}\right),$$

para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Distribución Exponencial

X tiene *distribución exponencial* con parámetro $\lambda \in (0, \infty)$ si:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Notación: $X \sim Exp(\lambda)$.

Observación!

Usualmente usada para describir el tiempo hasta la ocurrencia de un evento de interés.

Si $X \sim Exp(\lambda)$ entonces $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Perdida de memoria

Proposición 2.1

Si $X \sim Exp(\lambda)$ *entonces*

$$P(X > t+s|X > s) = P(X > t), \quad para\ s,t \in (0,\infty).$$

Prueba. Note que

$$P(X > t+s|X > s) = \frac{P(\{X > t+s\} \cap \{X > s\})}{P(X > s)}$$

pero $\{X > t+s\} \subset \{X > s\}$, entonces

$$P(X > t+s|X > s) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t).$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Universidad Católica San Pablo

Mínimo de exponenciales independientes

Proposición 2.2

Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes con $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

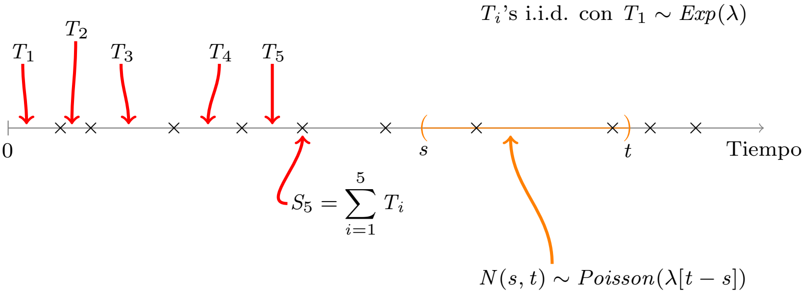
$$\min\{X_1, \ldots, X_n\} \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Prueba. Note que

$$P\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > a\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > a) = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) a}.$$

Proceso de Poisson de parámetro λ

El proceso:



Observación!

Si $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *son i.i.d. con* $T_1 \sim Exp(\lambda)$ *entonces* $\sum_{i=1}^{n} T_i \sim Gama(n, \lambda)$.

Esperanza de una v.a. discreta

La esperanza de una v.a. discreta X, con valores en $\mathcal{S}$ y función de probabilidad $p(x)$, es dada por

$$E(X) := \sum_{x \in \mathcal{S}} x\, p(x) = \sum_{x \in \mathcal{S}: x<0} x\, p(x) + \sum_{x \in \mathcal{S}: x \geq 0} x\, p(x),$$

... desde que al menos una de las sumas sea finita. Caso contrario, decimos que la esperanza de X no existe.

Observación!

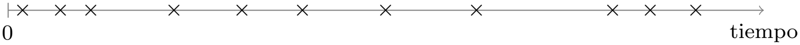
Note que ambas sumas son finitas si $\sum_{x \in \mathcal{S}} |x|\, p(x) < \infty$.

- Si $X \sim Poisson(\lambda)$ entonces

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \left\{ e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \right\} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$

Observación!

Considere un Proceso de Poisson de parámetro λ:



Cuál es el papel de λ?

Recuerde que $N(a, b) \sim Poisson(\lambda(b - a))$.

Ejemplo 2.2

Sea X una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que

$$p(i) = \frac{C}{i^2}, \quad i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad con\ C = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right\}^{-1}.$$

entonces $E(X)$ no existe pues:

$$-\sum_{i \in \mathbb{Z}_-} i\, p(i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} i\, p(i) = C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

Propiedades

Observación!

A seguir, consideramos variables aleatorias tales que su esperanza existe.

1. Si $X = c$ entonces $E(X) = c$.
2. Si $X \leq Y$ entonces $E(X) \leq E(Y)$.
3. **Linealidad.**

   $$E(c\,X + Y) = c\,E(X) + E(Y),$$

   si c es una constante, cuando los términos a la derecha tienen sentido.

   En general, se $X_1, \ldots, X_n$ son v.a. y $c_1, \ldots, c_n$ son constantes, entonces:

   $$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i).$$

El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$

Ejemplo 2.3

Considere el paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$. *Definimos:*

$$Y_n = \text{ posición de la partícula después del } n - \text{ésimo salto},$$

para $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, *y suponemos que* $Y_0 = 0$. *Podemos escribir*

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

donde $X_1, X_2, \ldots$ *son v.a. i.i.d. tales que*

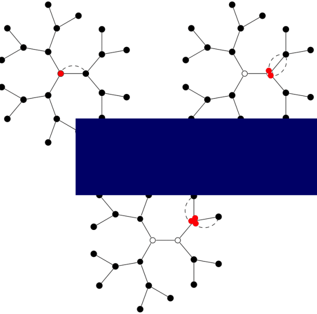
$$P(X_i = 1) = p = 1 - P(X_i = -1).$$

... continuación del Ejemplo 2.3. Note que

$$E(Y_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = n\,E(X_1) = n\,(2p-1).$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } p > 1/2; \\ 0, & \text{si } p = 1/2; \\ -\infty, & \text{si } p < 1/2. \end{cases}$$



Cadenas de Markov

Proceso estocástico

Un proceso estocástico a tiempo discreto é una sucesión de variables aleatorias:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

o

$$(X_n)_{n\geq 0}, n \in \mathbb{N},$$

definidas en el mismo espacio de probabilidad y tomando valores en algún conjunto numerable S.

Observación

El conjunto $\mathcal{S}$ se llama espacio de estados del proceso y cada uno de sus elementos se llama estado.

Propiedad markoviana y cadena de Markov

Una cadena de Markov a tiempo discreto (CMTD) con espacio de estados $\mathcal{S}$ es un proceso estocástico $(X_n)_{n\geq 0}$ con valores en $\mathcal{S}$ tal que

$$\underbrace{P(X_{n+1}}_{\text{futuro}} = j|\underbrace{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}}_{\text{pasado}}, \underbrace{X_n}_{\text{presente}} = i) = P(X_{n+1} = j|X_n = i),$$

para todo $n \geq 0$ y para todo subconjunto $\{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j\} \subset \mathcal{S}$.

Nota!

El inicio de la teoría de cadenas de Markov se remonta a 1913, con el trabajo del matemático ruso A.A. Markov. Markov pasó horas estudiando los padrones de vocales y consonantes de una novela de Alexander Pushkin y, aunque su análisis no aportó mucho al estudio de la literatura de la época, sus ideas dieron origen a lo que se conoce como cadenas de Markov (Hayes, 2013).

Universidade Federal de Pernambuco

Universidad Católica San Pablo

Suponemos que para todo $i, j \in \mathcal{S}$ y para todo $n \geq 0$ las probabilidades

$$p(i,j) := P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

llamadas probabilidades de transición no dependen de n. En este caso decimos que la cadena de Markov es homogénea.

Note que $p(i,j) \in [0,1]$ y que

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p(i,j) = 1.$$

Una cadena de Markov puede ser completamente determinada por las probabilidades de transición y por la distribución de su estado inicial:

$$\text{si } P(X_0 = i) = \alpha_i, \text{ para todo } i \in \mathcal{S}, \text{ con } \alpha_i \in [0,1] \text{ y } \sum_{i \in \mathcal{S}} \alpha_i = 1,$$

entonces

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \alpha_{i_0}\, p(i_0, i_1)\, p(i_1, i_2) \ldots p(i_{n-1}, i_n).$$

Ejemplo: el proceso de ramificación

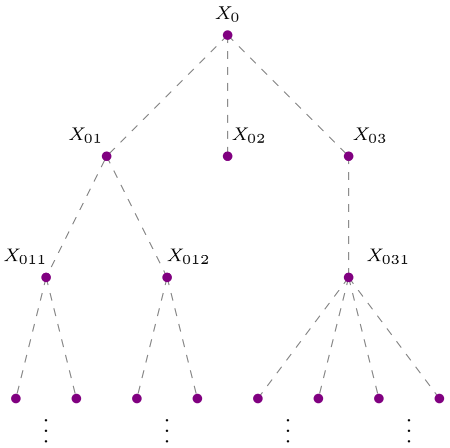
Considere una variable aleatoria discreta X con función de probabilidad

$$P(X = i) = p_i,$$

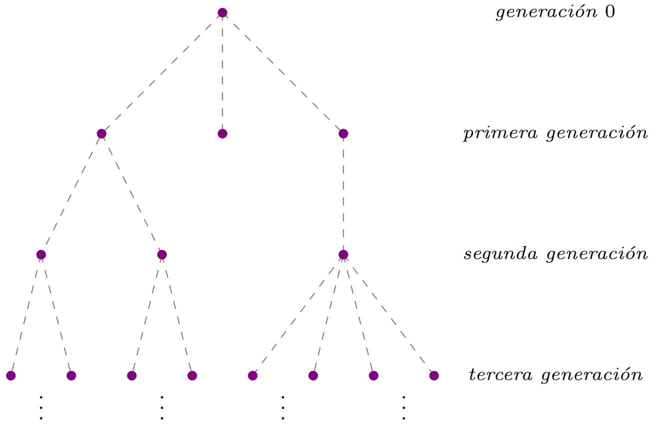
para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

A seguir, todas las variables son copias independientes de X.

Proceso de ramificación: idea



Proceso de ramificación: generaciones



Proceso de ramificación: la cadena de Markov

Considere, para cada $n \geq 0$, la variable aleatoria:

$$Z_n = \# \text{ de partículas de la } n\text{-ésima generación},$$

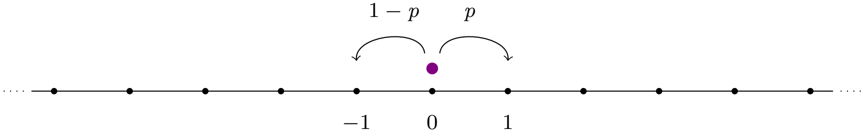
y note que para todo $n \geq 1$ tenemos:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i,$$

donde $X_1, X_2, \ldots$ son i.i.d. a la v.a. X. La sucesión $(Z_n)_{n\geq 0}$ se llama de proceso de ramificación o proceso de Galton-Watson y es una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y probabilidades de transición:

$$p(i,j) = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} P\left(\sum_{r=1}^{i} X_r = j\right), & \text{para } i \geq 1 \text{ y } j \geq 0, \\ 0, & \text{para } i = 0 \text{ y } j > 0, \\ 1, & \text{para } i = 0 \text{ y } j = 0. \end{cases}$$

Ejemplo: paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$



El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$

Consideramos la sucesión de v.a. i.i.d. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ tal que

$$P(X_1 = 1) = p = 1 - P(X_1 = -1).$$

Si Y_n denota la posición de la partícula en el n-ésimo instante de tiempo, entonces

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n, \quad \text{para todo } n \in \{1, 2, \ldots\}.$$

La sucesión $(Y_n)_{n\geq 0}$ se llama paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$ y es una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{Z}$ y probabilidades de transición:

$$p(i,j) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i) = \begin{cases} p, & \text{para } j = i+1, \\ 1-p, & \text{para } j = i-1, \\ 0, & \text{para } j \neq i \pm 1. \end{cases}$$

Ejemplo: modelo de rumor de Daley-Kendall

[Daley e Kendall, 1964]

$\downarrow$

Epidemics and Rumours. Nature 204 (1964), 1118.

Stochastic Rumours. J. Inst. Maths Applics 1 (1964), 42-55.

"let's keep it simpler and leave it to others to think of variations"
was Kendall's advice (Daryl Daley. Comunicação pessoal, 2019)

[Maki e Thompson, 1973]

$\downarrow$

Mathematical Models and Applications. Prentice-Hall, N.J. (1973).

Primeras consideraciones: la población

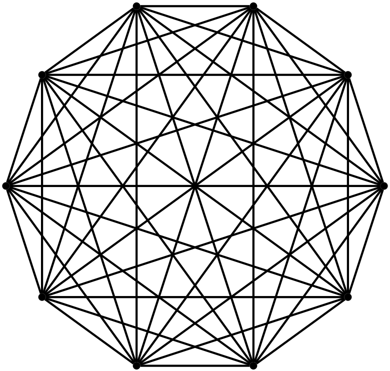


Figura: Grafo completo $\mathbb{K}_{10}$.

Primeras consideraciones: la población

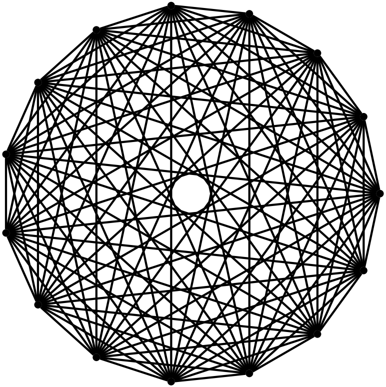
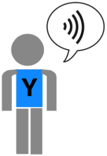
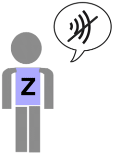


Figura: Grafo completo $\mathbb{K}_{15}$.

Primeras consideraciones: tipos de individuos

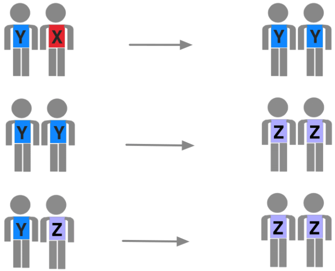




Propagadores	Neutros	Ignorantes
(Spreaders)	*(Stiflers)*	*(Ignorants)*

Primeras consideraciones: interacciones

- Pares de individuos interactúan en tiempos $i.i.d.$ $Exp(1)$.
- Ocurren las siguientes transiciones:



Modelo de Daley-Kendall a tiempo discreto

Para cada $n \geq 0$, consideramos las variables aleatorias:

- X_n = número de ignorantes en el tiempo n,
- Y_n = número propagadores en el tiempo n,
- Z_n = número de neutros en el tiempo n.

Suponemos que $X_0 = N - 1,\ Y_0 = 1,\ Z_0 = 0$ y que

$$X_n + Y_n + Z_n = N$$

para todo $n \geq 0$, lo que representa que la población es cerrada.

Modelo de Daley-Kendall a tiempo discreto

El modelo de Daley-Kendall a tiempo discreto es la CMTD $(V_n)_{n\geq 0}$,

$$V_n := (X_n, Y_n, Z_n),$$

con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, N\}^3$ y transiciones dadas por:

$$(i,j,k) \to (i-1, j+1, k) \quad \ldots \text{ con probabilidad } = \frac{i\,j}{\binom{N}{2}}$$

$$(i,j,k) \to (i, j-1, k+1) \quad \ldots \text{ con probabilidad } = \frac{j\,k}{\binom{N}{2}}$$

$$(i,j,k) \to (i, j-2, k+2) \quad \ldots \text{ con probabilidad } = \frac{\binom{j}{2}}{\binom{N}{2}}$$

$$(i,j,k) \to (i, j, k) \quad \ldots \text{ con probabilidad } = \frac{\binom{i}{2} + \binom{k}{2} + ik}{\binom{N}{2}}$$

En otras palabras:

$$P\left((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i-1, j+1, k) \middle| (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)\right) = \frac{i\,j}{\binom{N}{2}};$$

$$P\left((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i, j-1, k+1) \middle| (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)\right) = \frac{j\,k}{\binom{N}{2}};$$

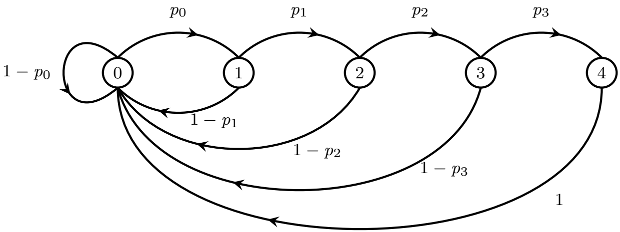
$$P\left((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i, j-2, k+2) \middle| (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)\right) = \frac{\binom{j}{2}}{\binom{N}{2}}.$$

$$P\left((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i, j, k) \middle| (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)\right) = \frac{\binom{i}{2} + \binom{k}{2} + ik}{\binom{N}{2}}.$$

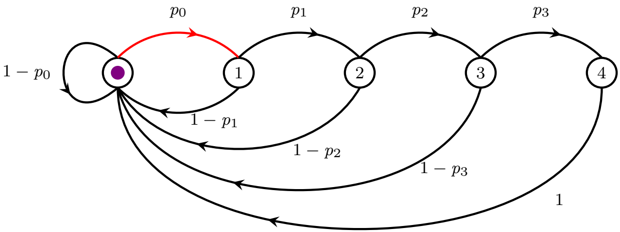
Observación

Para crear la versión discreta a partir de la continua note que si $X_1, \ldots, X_n$ *son i.i.d. con distribución* $Exp(\lambda)$ *entonces* $P\left(X_i < \min_{j \neq i}\{X_j\}\right) = 1/n$.

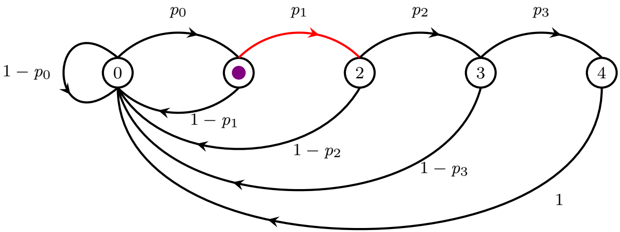
Ejemplo: paseo aleatorio en un grafo finito



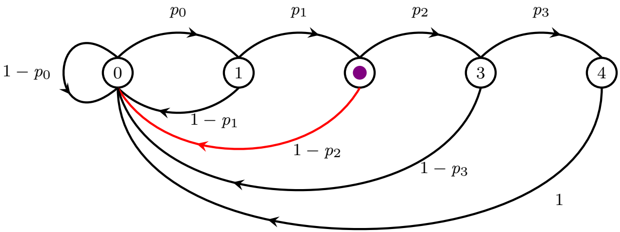
Ejemplo: paseo aleatorio en un grafo finito



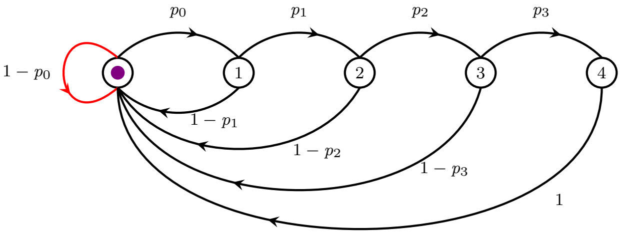
Ejemplo: paseo aleatorio en un grafo finito



Ejemplo: paseo aleatorio en un grafo finito



Ejemplo: paseo aleatorio en un grafo finito



El paseo aleatorio en un grafo finito dirigido

Si Y_n denota la posición de la partícula en el n-ésimo paso de tiempo,

... entonces la sucesión $(Y_n)_{n\geq 0}$ se llama paseo aleatorio en el grafo considerado y es una cadena de Markov con espacio de estados $\{0,1,2,3,4\}$ y probabilidades de transición:

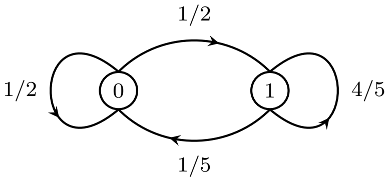
$$p(i,j) = P(Y_{n+1} = j \,|\, Y_n = i) = \begin{cases} p_i, & \text{para } j = i+1 \text{ y } i \in \{0,1,2,3\}, \\ 1 - p_i, & \text{para } j = 0 \text{ y } i \in \{0,1,2,3\}, \\ 1, & \text{para } j = 0 \text{ y } i = 4, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Representación gráfica de una cadena de Markov

Considere la CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ con espacio de estados $\{0, 1\}$ y matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:

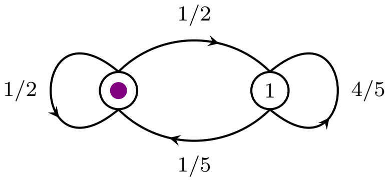


Representación gráfica de una cadena de Markov

Considere la CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ con espacio de estados $\{0, 1\}$ y matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



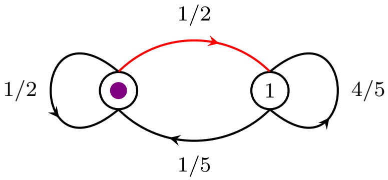
$$X_0 = 0$$

Representación gráfica de una cadena de Markov

Considere la CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ con espacio de estados $\{0,1\}$ y matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



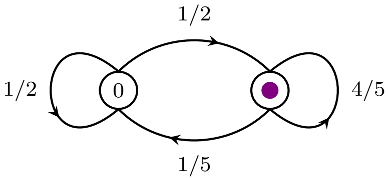
$X_0 = 0$

Representación gráfica de una cadena de Markov

Considere la CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ con espacio de estados $\{0,1\}$ y matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



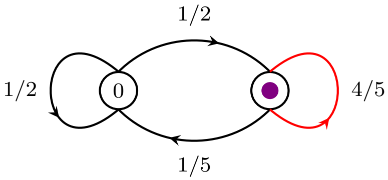
$$X_1 = 1$$

Representación gráfica de una cadena de Markov

Considere la CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ con espacio de estados $\{0,1\}$ y matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



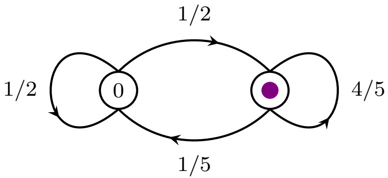
$$X_1 = 1$$

Representación gráfica de una cadena de Markov

Considere la CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ con espacio de estados $\{0,1\}$ y matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



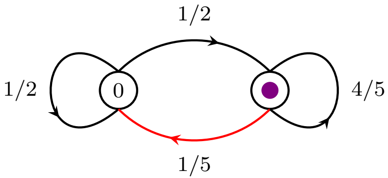
$X_2 = 1$

Representación gráfica de una cadena de Markov

Considere la CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ con espacio de estados $\{0, 1\}$ y matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



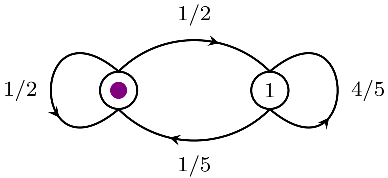
$$X_2 = 1$$

Representación gráfica de una cadena de Markov

Considere la CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ con espacio de estados $\{0,1\}$ e matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

Podemos representar:



$$X_3 = 0$$

Note que $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0 | X_0 = 0) = p(0,1)p(1,1)p(1,0) = 2/25.$

Otra forma de definir una cadena de Markov

Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ un proceso con valores en $\mathcal{S}$. Si existe una sucesión de variables aleatorias i.i.d.

$$U_1, U_2, \ldots$$

con distribución común uniforme en el intervalo $(0,1)$ y una función

$$f : \mathcal{S} \times (0,1) \to \mathcal{S}$$

tal que

$$X_{n+1} = f(X_n, U_n),$$

para todo $n \geq 0$, decimos que $(X_n)_{n \geq 0}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto.

Ejemplo 2.4

Considere el paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$, $(Y_n)_{n\geq 0}$. *Si* $U_1, U_2, \ldots$ *son i.i.d. con* $U_1 \sim Uniforme(0,1)$ *entonces podemos escribir*

$$Y_{n+1} = f(Y_n, U_n),$$

donde la función $f : \mathbb{Z} \times (0,1) \to \mathbb{Z}$ *es dada por*

$$f(i,u) := \begin{cases} i+1, & si\ u < p, \\ i-1, & si\ u \geq p. \end{cases}$$

Probabilidades de transición en n pasos

Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una CMTD con espacio de estados $\mathcal{S}$. Se llama probabilidades de transición en n pasos a las probabilidades

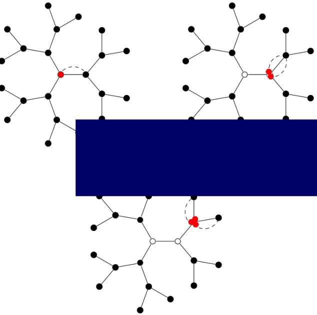
$$p_n(i,j) := P(X_{m+n} = j | X_m = n),$$

para todo $m, n \geq 0$ y $i, j \in \mathcal{S}$. En este caso

$$p_1(i,j) = p(i,j)$$

y por convención suponemos que

$$p_0(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$



Recurrencia del PA

Recurrencia e transitoriedad

Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una CMTD con espacio de estados $\mathcal{S}$. Para $i \in \mathcal{S}$ sea

$$\tau_i := \inf\{n \geq 1 : X_n = i\},$$

con $\tau_i := \infty$ si el ínfimo no existe. Si

$$\mathbb{P}(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$$

decimos que i es un estado recurrente. Si i no es recurrente decimos que es transitorio; es decir, si

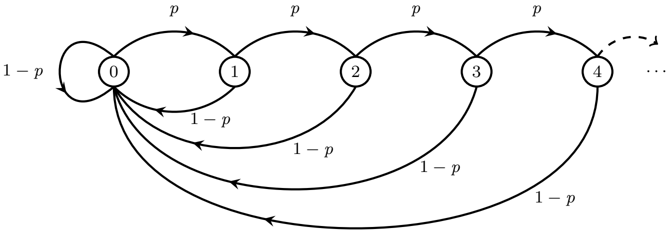
$$\mathbb{P}(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$$

decimos que i es transitorio.

Castillo de cartas

Ejemplo 2.5

Considere la CMTD dada por:



Dado que $X_0 = 0$, $\tau_0 \sim Geometrica(1-p)$. *Como* $p \in (0,1)$ *tenemos que*

$$P(\tau_0 < \infty | X_0 = 0) = 1.$$

Es decir, el estado 0 es recurrente!

Teorema 2.2

Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ *una CMTD con espacio de estados* $\mathcal{S}$ *y probabilidades de transición* $p(i,j)$ *para* $i, j \in \mathcal{S}$*. Entonces*

$$i \in \mathcal{S} \text{ es recurrente si, y solamente si, } \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i) = \infty.$$

Prueba do Teorema 2.2. Para cada $n \geq 1$ considere la variable indicadora

$$I_n := \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = i, \\ 0, & \text{se } X_n \neq i, \end{cases}$$

y observe que $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ es el número de visitas del proceso al estado i.

($\Rightarrow$) Suponga que i es recurrente. Entonces

$$P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1 \quad \text{y} \quad E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \middle| X_0 = i\right) = \infty.$$

Pero

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \middle| X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(I_n | X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X_n = i | X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i).$$

Prueba do Teorema 2.2. $(\Leftarrow)$ Para probar la vuelta suponga que i es transitorio. En este caso

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \middle| X_0 = i\right) \sim Geom(p_i)$$

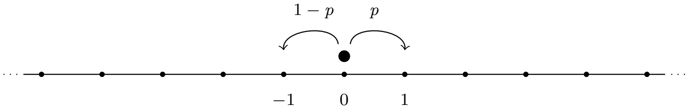
donde $p_i := P(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$ y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \middle| X_0 = i\right) = \frac{1}{p_i} < \infty.$$

El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$

Recuerde que el paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$ es la cadena de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ con espacio de estados $\mathbb{Z}$ y probabilidades de transición:

$$p(i,j) = P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) = \begin{cases} p, & \text{para } j = i+1, \\ 1-p, & \text{para } j = i-1, \\ 0, & \text{para } j \neq i \pm 1. \end{cases}$$



Teorema 2.3

El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$ es recurrente si, y solamente si, $p = 1/2$.

Prueba. Vamos a analizar $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i)$. Note que $p_{2n-1}(0,0) = 0$ para $n \geq 1$ mientras que

$$p_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

De hecho, dado $X_0 = 0$, para $X_{2n} = 0$, una configuración favorable es:

$$\sigma : \quad \begin{array}{cccccccccc} \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \text{\_\_} & \text{\_\_} & \text{\_\_} & \text{\_\_} & \text{\_\_} & \cdots\cdots & \text{\_\_} & \text{\_\_} & \text{\_\_} & \text{\_\_} \\ 1 & 2 & 3 & & & & & & 2n-1 & 2n \end{array} \qquad \begin{array}{l} n \text{ a izquierda } (\leftarrow) \\ n \text{ a derecha } (\rightarrow) \end{array}$$

Pero hay $\binom{2n}{n}$ formas diferentes de obtener una configuración de estas y

$$P(\sigma) = p^n(1-p)^n, \quad \text{por independencia!}$$

Denotamos $q := 1 - p$. entonces

$$p_{2n}(0,0) = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right\} (p\, q)^n$$

y usamos la fórmula de Stirling:

$$n! \sim n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

representando

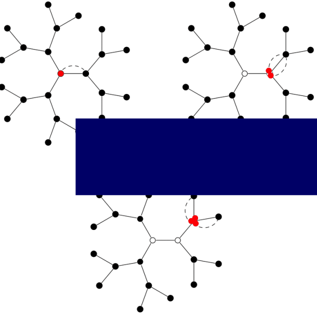
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n\, e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

para obtener

$$p_{2n}(0,0) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \infty \text{ si, y solamente si, } p = \frac{1}{2}.$$

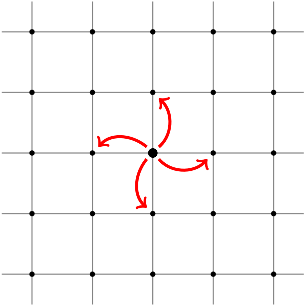


Extensiones!

El paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^2$

Es la cadena de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ con estados en $\mathbb{Z}^2$ y probabilidades de transición dadas por: para $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$p(u,v) = P(Y_{n+1} = v | Y_n = u) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si } v \in \{(u_1, u_2 \pm 1), (u_1 \pm 1, u_2)\}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$



El paseo aleatorio en $\mathbb{Z}^2$

es recurrente.

Denotamos $\mathbf{0} = (0,0)$. Note que $p_{2n-1}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$, $n \geq 1$, mientras que

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, (n-i)!\, (n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}.$$

De hecho, dado $X_0 = \mathbf{0}$, para $X_{2n} = \mathbf{0}$, una configuración favorable es:

$$\sigma : \quad \underset{1}{\underline{\leftarrow}} \quad \underset{2}{\underline{\rightarrow}} \quad \underset{3}{\underline{\downarrow}} \quad \underline{\downarrow} \quad \underline{\leftarrow} \quad \cdots\cdots \quad \underline{\rightarrow} \quad \underline{\uparrow} \quad \underset{2n-1}{\underline{\downarrow}} \quad \underset{2n}{\underline{\leftarrow}}$$

i saltos $\rightarrow$

i saltos $\leftarrow$

$n - i$ saltos $\uparrow$

$n - i$ saltos $\downarrow$

Pero, para cada $i \in \{0, 1 \ldots, n\}$, hay

$$\frac{(2n)!}{i!\, i!\, (n-i)!\, (n-i)!}$$

formas diferentes de obtener una configuración de estas y $P(\sigma) = (1/4)^{2n}$.

Para encontrar una aproximación de

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, (n-i)!\, (n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n},$$

note que

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, (n-i)!\, (n-i)!} = \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}^2.$$

entonces,

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

y por la fórmula de Stirling concluimos que

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \sim \frac{1}{\pi n}.$$

$$\text{Como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \text{ entonces } \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \infty.$$

El paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$

El P.A.S. en $\mathbb{Z}^3$ es la cadena de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ con estados en $\mathbb{Z}^3$ y probabilidades de transición dadas por: para $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Z}^3$

$$p(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{se } v \in \{(u_1, u_2 \pm 1, u_3), (u_1 \pm 1, u_2, u_3), (u_1, u_2, u_3 \pm 1)\}, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Sabemos que el P.A.S. en $\mathbb{Z}^3$ es transitorio!

Si denotamos $\mathbf{0} = (0,0,0)$, tenemos que $p_{2n-1}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$, $n \geq 1$ y

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \sum_{\substack{i,j,k\geq 0 \\ i+j+k=n}} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, j!\, j!\, k!\, k!} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Por otro lado, como

$$\sum_{\substack{i,j,k\geq 0 \\ i+j+k=n}} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, j!\, j!\, k!\, k!} = \binom{2n}{n} \sum_{\substack{i,j,k\geq 0 \\ i+j+k=n}} \binom{n}{i,j,k}^2$$

tenemos

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{\substack{i,j,k\geq 0 \\ i+j+k=n}} \left\{\binom{n}{i,j,k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}^2.$$

Note que

$$\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=n}} \left\{ \binom{n}{i,j,k} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}^2 \leq C_{n,3} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left\{ \sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=n}} \binom{n}{i,j,k} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\},$$

máximo de los coeficientes $\qquad = 1$

La suma es igual a uno pues en el experimento de distribuir al azar n bolas distintas en 3 urnas distintas, tenemos que, para $i, j, k \geq 0$ con $i + j + k = n$, entonces

$$\binom{n}{i,j,k} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

es la probabilidad de que i, j y k bolas sean colocadas, resp., en la primera, segunda y tercera urna.

Así, conseguimos

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \leq \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} C_{n,3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

Haciendo $n = 3m$, tenemos que

$$\binom{3m}{i\,j\,k} \leq \binom{3m}{m\,m\,m} \tag{1}$$

para todo i, j, k tal que $i + j + k = 3m$. De hecho, fije i, j, k y sin perdida de generalidad suponga que $i < m$ y que $j \geq m + 1$. Note que $i + 1 < j$ y así:

$$\binom{3m}{i\,j\,k} = \frac{(3m)!}{i!\,j!\,k!} \leq \left\{\frac{j}{i+1}\right\}\left\{\frac{(3m)!}{i!\,j!\,k!}\right\} \leq \frac{(3m)!}{(i+1)!\,(j-1)!\,k!}.$$

Repetidas realizaciones de este argumento nos lleva a la desigualdad (1).

Luego,

$$p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \leq \binom{6m}{3m}\left(\frac{1}{2}\right)^{6m}\binom{3m}{m\ m\ m}\left(\frac{1}{3}\right)^{3m} \sim \frac{1}{2(m\pi)^{3/2}}.$$

Como $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{3/2}} < \infty$, entonces $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) < \infty$. Además, note que

$$p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{2} p_{6m-2}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \quad \text{e} \quad p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{4} p_{6m-4}(\mathbf{0},\mathbf{0}).$$

Por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) < \infty$.

En general

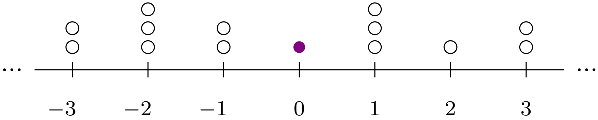
Teorema 2.4

El PA simétrico en $\mathbb{Z}^d$ es recurrente si, y solamente si, $d \in \{1, 2\}$.

Sobre la prueba:

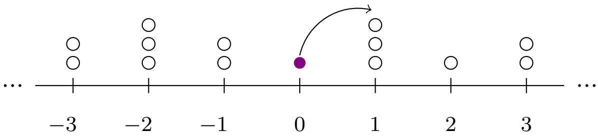
- Para más detalles de las pruebas para $d \in \{1, 2, 3\}$ usando los argumentos de estos slides ver:
  - Sección I.8 de R. Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser, 1999.
  - o Sección 1.6 de J. Norris. Markov Chains, Cambridge, 1997.
- Para una prueba para $d \in \{2, 3\}$ usando una relación entre paseos aleatorios y redes eléctricas ver Sección 1.5 de G. Grimmett. Probability on Graphs, Cambridge, 2010.
- Para $d \geq 4$: usando argumentos de acoplamiento se prueba que transitoriedad en $d = 3$ implica transitoriedad para $d \geq 4$.

El modelo de los sapos: idea



○ : sapo dormido ● : sapo despierto

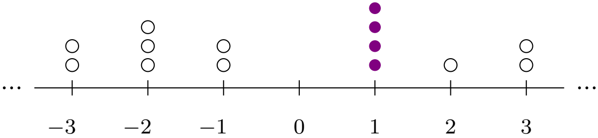
El modelo de los sapos: idea



○ : sapo dormido

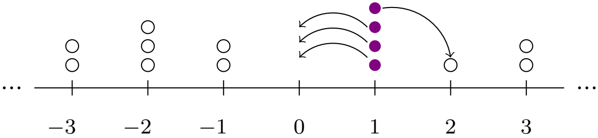
●: sapo despierto

El modelo de los sapos: idea



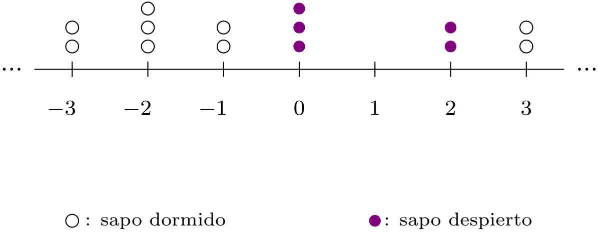
○ : sapo dormido ● : sapo despierto

El modelo de los sapos: idea



○ : sapo dormido ● : sapo despierto

El modelo de los sapos: idea



Recurrencia para el modelo de los sapos

¿El 0 es visitado infinitas veces con probabilidad 1?

¡Si $p = 1/2$ volvemos al resultado del paseo aleatório simétrico!

Condiciones ...

- Configuración inicial dada por $(\eta_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ y $p \in (1/2, 1)$, donde

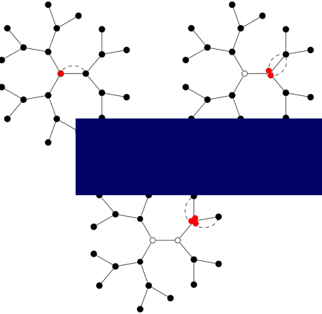
$$\eta_x = \#\text{ de sapos dormidos en } x \text{ en el instante } 0.$$

- El modelo es recurrente si, y solamente si,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \left(\frac{1-p}{p}\right)^j = \infty.$$

Ver: Recurrence for the frog model with drift on Z (2009).
N. Gantert and P. Schmidt. Markov Processes and Related Fields **15**, *pp. 51-58.*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Universidad Católica San Pablo



Muchas gracias!

Universidade Federal de Pernambuco

Universidad Católica San Pablo