Gabarito - Lista de exercícios 1
PGE950 - Probabilidade | PPGE - UFPE
Prof. Pablo M. Rodriguez
1° Semestre de 2020

No que segue $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ denota um espaço de probabilidade. Isto é, Ω é um conjunto não-vazio, $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra de subconjuntos de Ω e P é uma probabilidade em $\mathcal{F}$.

Prove as seguinte propriedades:

1. Se $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

   Prova. Como estamos assumindo que $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra, sabemos que se $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e note que se $A_i = \emptyset$ para todo $i > n$ temos que, como $\emptyset \in \mathcal{F}$, então:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

4 (σ-subaditividade) Se $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prova. Além de provar o resultado como foi feito na aula podemos fazer o seguinte. Se definimos para $n \in \mathbb{N}$

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

temos que $B_n \nearrow$. Então,

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Logo,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

onde usamos que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

5 Se $A_n \searrow$ é uma sequência de eventos aleatórios então

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Prova. Note que $A_n \searrow$ implica que $A_n^c \nearrow$. Neste caso sabemos que:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$$

então

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(A_n^c)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Observação 1 *Note que $A_n \searrow$ não necessariamente implica que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, como vemos no seguinte exemplo: Considere o experimento de escolher ao acaso um ponto do intervalo $[0,1]$. Considere o evento*

$$A_n = \text{“o ponto escolhido pertence ao intervalo } \left[0, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\text{”},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $A_n \searrow$. Além disto,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

8 (a) Se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são duas σ-álgebras em Ω então $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ também é uma σ-álgebra em Ω.

(b) Generalize o item anterior para n σ-álgebras em Ω.

(c) Se $\mathcal{C}$ é uma classe de subconjuntos de Ω mostre que existe pelo menos uma σ-álgebra que contém $\mathcal{C}$.

(d) Seja $\mathcal{C}$ é uma classe de subconjuntos de Ω. Como você definiria “a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{C}$?

Prova.

(a) Vamos provar que vale a3’. Note que se $A_n \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então, em particular,

$$A_n \in \mathcal{F}_1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1,$$
$$A_n \in \mathcal{F}_2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_2.$$

Então, vale a3’ para $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ pois

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2.$$

Da mesma forma provamos a1 e a2 e concluímos que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ é σ-álgebra.

(b) Sejam $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ n σ-álgebras em Ω. Por indução podemos mostrar que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$$

também é σ-álgebra em Ω. O caso $n = 2$ foi provado no item (a). Suponha válido para $n-1$ e note que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \mathcal{F}_i\right) \bigcap \mathcal{F}_n.$$

Isto é, temos a interseção de duas σ-álgebras (ver a hipótese inductiva) e portanto aplicando novamente (a) conseguimos o resultado.

(c) Considere o conjunto das partes de Ω. Isto é, seja $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e note que $\mathcal{F}$ é σ-álgebra e $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

(d) Considere

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\sigma} \mathcal{F}_\sigma$$

em que a interseção é realizada sobre toda $\mathcal{F}_\sigma$ σ-álgebra em Ω tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_\sigma$.