

# MODELOS PROBABILÍSTICOS

PABLO M. RODRIGUEZ

RESUMEN. En la teoría de la probabilidad hay una gran variedad de modelos matemáticos que suelen ser usados para representar fenómenos de naturaleza aleatoria. Si bien los libros de texto son una excelente fuente para entrar en contacto con muchos de estos modelos, existen otros que fueron formulados recientemente y que se encuentran apenas en artículos científicos. En estas notas presentamos de forma simple dos de estos modelos recientes, traemos algunos conceptos asociados y discutimos resultados de interés. Uno es conocido como el modelo de los sapos y es un sistema de paseos aleatorios que interactúan en un grafo. El otro es un modelo de estructura aleatoria que se conoce como modelo de percolación accesible.

## 1. INTRODUCCIÓN

El propósito de estas notas es presentar de forma simple algunas de las ideas relacionadas al estudio de dos modelos probabilísticos propuestos recientemente en la literatura. Uno de ellos, extiende una clase especial de proceso estocástico conocido como paseo aleatorio; el otro es un modelo de estructura aleatoria que pertenece a la clase de modelos conocidos como modelos de percolación. Resaltamos que no nos proponemos hacer un abordaje riguroso, y sí, en explicar ideas centrales para despertar la curiosidad sobre cada modelo. A lo largo del texto recomendaremos referencias para una lectura más detallada sobre cada tópico, muchas de las cuales son artículos recientes publicados en la literatura científica. Asumimos que los lectores y lectoras tienen cierta familiaridad con conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, ver por ejemplo [6, 14, 20], y con el lenguaje de la teoría de los grafos, ver por ejemplo [35].

Concentramos la discusión alrededor de dos problemas. Para motivar el primero consideramos un grafo cuyo conjunto de vértices es formado por los números enteros; es decir consideramos el grafo  $G = (V, E)$ , donde  $V = \mathbb{Z}$  es el conjunto de vértices y el conjunto de aristas es formado por  $E = \{\{i, i + 1\} : i \in \mathbb{Z}\}$ . Aquí cometemos un clásico abuso de notación y hacemos referencia a este grafo simplemente como  $\mathbb{Z}$  en lugar de  $G$ . En este grafo consideramos partículas que interactúan entre sí. En particular, suponemos que hay dos tipos de partículas; a saber, las activas y las inactivas. En un instante inicial, hay una partícula activa en el vértice 0 mientras que en los otros vértices hay partículas inactivas (ver Figura 1). Cada partícula activa elige, en cada instante discreto de tiempo, dar un salto para el vértice de su derecha con probabilidad  $p$  o para el vértice de su izquierda con probabilidad  $1 - p$ , con  $p \in (0, 1)$ . Esto es realizado independientemente de las elecciones anteriores y de las elecciones de cualquier otra partícula activa. Las partículas inactivas no se mueven. La interacción entre partículas surge en el momento en que una partícula activa salta para un vértice en el cual hay partículas inactivas, momento en el cual las últimas se activan. Notemos que esta dinámica genera una reacción en cadena de partículas que se van activando a lo largo del tiempo y que motiva la siguiente pregunta: ¿qué podemos decir sobre el evento que el vértice 0 es visitado infinitas veces por partículas activas? Veremos que la respuesta depende de  $p$  y del número

de partículas inactivas que hay inicialmente en los vértices de  $\mathbb{Z}$ . Este modelo se conoce con el pintoresco nombre de modelo de los sapos – a buen entendedor pocas palabras.

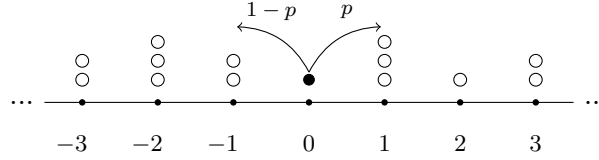


FIGURA 1. El modelo de los sapos en  $\mathbb{Z}$  comenzando con una partícula activa en 0 y partículas inactivas en los otros vértices del grafo. En cada instante discreto de tiempo partículas activas saltan a derecha o izquierda con probabilidad  $p$  o  $1 - p$ , respectivamente, activando aquellas partículas inactivas que se encuentren en el camino.

Para motivar el segundo modelo consideramos como grafo un árbol con un número infinito de vértices  $\mathbb{T} = (V, E)$ . Es decir, un grafo conexo, sin ciclos, con un número infinito de vértices y localmente finito (cada vértice tiene un número finito de vecinos). Luego, asociamos para cada vértice  $v \in V$  de  $\mathbb{T}$  una variable aleatoria absolutamente continua  $X_v$  tomada de una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Destacamos un vértice de  $\mathbb{T}$ , que llamamos la raíz del árbol, y lo denotamos por  $\mathbf{0}$ . Una pregunta de interés para este modelo es si existe un camino comenzando en  $\mathbf{0}$  (ver Figura 2), formado por infinitos vértices  $v_1, v_2, \dots$ , tal que las variables aleatorias asociadas están en orden creciente; es decir, tal que  $X_{\mathbf{0}} < X_{v_1} < X_{v_2} < \dots$ . En este caso veremos que la respuesta depende del “crecimiento” de árbol. Este modelo es un tipo especial de modelo de percolación, conocido como modelo de percolación accesible.

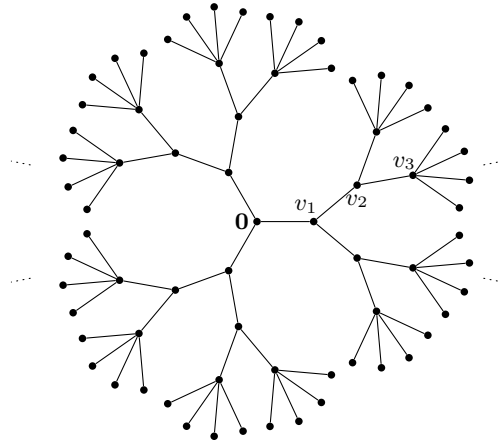


FIGURA 2. Para el modelo de percolación accesible en árboles infinitos se asocia una variable aleatoria continua para cada vértice del grafo. El interés es buscar condiciones para la existencia de caminos formados por infinitos vértices  $\mathbf{0}, v_1, v_2, v_3, \dots$  tales que  $X_{\mathbf{0}} < X_{v_1} < X_{v_2} < X_{v_3} < \dots$

En el resto de las notas, discutiremos ambos problemas y los conceptos relacionados. La Sección 2 está dedicada al paseo aleatorio y al modelo de los sapos. Presentaremos los resultados de forma constructiva comenzando desde un problema muy conocido en la teoría de la probabilidad: la ruina del jugador. La Sección 3 resume los resultados para el modelo de percolación. Después de una motivación mencionando el modelo básico de percolación, el cual motiva la teoría desarrollada para esta clase de modelos, nos concentramos en el modelo de percolación accesible.

## 2. PASEOS ALEATORIOS Y EL MODELO DE LOS SAPOS

La discusión de esta sección gira en torno del concepto de paseo aleatorio y de la noción de recurrencia y transitoriedad. Si bien la mayor parte puede ser desarrollada con el lenguaje de cadenas de Markov, presentaremos los conceptos de forma constructiva intentando no recurrir a esta teoría. Iniciamos con un problema muy conocido de la teoría de la probabilidad.

**2.1. La ruina del jugador.** Un problema bastante interesante cuyo enunciado y solución tuvieron mucho protagonismo en los inicios de la teoría de la probabilidad es conocido como el problema de la ruina del jugador y fue propuesto por Blaise Pascal a Pierre de Fermat en 1656. A continuación escribimos la versión más conocida, propuesta por Huygens en 1657, y que usualmente se encuentra en cualquier libro básico de probabilidad. Para una revisión de la historia del problema y una discusión sobre las soluciones de Pascal, Fermat y Huygens, entre otros, sugerimos la lectura de [10].

**Problema:** Dos jugadores,  $A$  y  $B$ , realizan apuestas a los resultados de sucesivos lanzamientos de una moneda que, en cada lanzamiento, tiene probabilidad  $p \in (0, 1)$  de dar cara independientemente de los lanzamientos ya realizados. En cada lanzamiento la jugadora  $A$  gana un peso del jugador  $B$  si la moneda resulta en cara; caso contrario el jugador  $B$  gana un peso de  $A$ . Suponemos, además, que inicialmente hay  $n$  pesos en juego, que  $A$  tiene  $i$  pesos y que  $B$  tiene  $n - i$  pesos. El juego termina cuando uno de los dos jugadores se queda con todo el dinero. Una pregunta que deseamos responder es: ¿cuál es la probabilidad de que  $A$  gane el juego?

Para calcular esta probabilidad definimos el evento:

$$A(i) := \{\text{la jugadora } A \text{ gana el juego}\}, \quad (1)$$

donde usamos  $i$  en la notación para representar la suposición de que  $A$  comienza el juego con  $i$  pesos. Como queremos calcular  $p_i := \mathbb{P}(A(i))$ , definimos el evento

$$C := \{\text{el primer lanzamiento resulta en cara}\}$$

y observamos que por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$p_i = \mathbb{P}(A(i)|C) \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A(i)|C^c) \mathbb{P}(C^c),$$

lo que implica que

$$p_i = p p_{i+1} + (1 - p) p_{i-1}. \quad (2)$$

En la ecuación anterior tenemos que  $\mathbb{P}(A(i)|C) = p_{i+1}$  porque dado que el primer lanzamiento resulta en cara, la probabilidad de que  $A$  gane el juego comenzando con  $i$  pesos coincide con la probabilidad de  $A$  ganar suponiendo que inicia con  $i + 1$  pesos. Análogamente  $\mathbb{P}(A(i)|C^c) = p_{i-1}$ . No es difícil verificar que (2) vale para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$ . Por otro lado, se puede asumir que  $p_0 = 0$  y  $p_n = 1$  (¿por qué?). Así, el problema se reduce a encontrar la solución

del sistema de ecuaciones en diferencias (2), con las condiciones de contorno  $p_0 = 0$  y  $p_n = 1$ . Para simplificar la notación, denotamos  $q := 1 - p$ . Entonces (2) puede ser escrita como

$$p_{i+1} - p_i = \left(\frac{q}{p}\right) (p_i - p_{i-1}), \quad i \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \quad (3)$$

Aplicando sucesivamente (3), para  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , y usando  $p_0 = 0$  tenemos que

$$p_i - p_{i-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1, \quad (4)$$

para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Esta última expresión nos permite encontrar

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1 \\ &= p_{i-2} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-2} p_1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1 \\ &\vdots \\ &= \left(1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right) p_1. \end{aligned}$$

Luego, una primera expresión para la probabilidad  $p_i$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , está dada por:

$$p_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)} p_1, & \text{si } q \neq p, \\ i p_1, & \text{si } q = p. \end{cases}$$

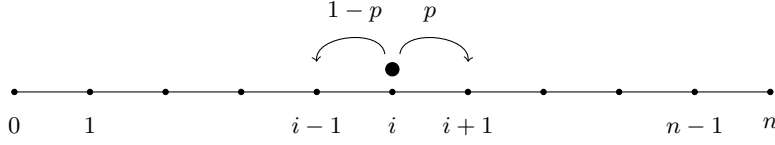
Como  $p_n = 1$  podemos obtener de la expresión anterior, para  $i = n$ , el valor de  $p_1$  en función de  $p$  y de  $q$ , y por lo tanto, concluir que:

$$p_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^n}, & \text{si } q \neq p, \\ i/n, & \text{si } q = p, \end{cases} \quad (5)$$

para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Esta es la probabilidad de que la jugadora  $A$  gane el juego asumiendo que empieza con  $i$  pesos mientras que  $B$  comienza con  $n - i$  pesos.

**Observación 1.** *Existen muchas variantes del problema presentado en esta sección. En [17], por ejemplo, se analiza la ruina del jugador con empates y en [33] se estudia un problema de ruina de jugador pero con más de dos jugadores involucrados. Ambas referencias son una buena lectura sobre el asunto.*

El problema de la ruina del jugador será nuestra excusa para introducir la noción de paseo aleatorio. Informalmente hablando, un paseo aleatorio es una descripción matemática (probabilística) de las consecutivas posiciones de una partícula que “camina”, moviéndose en instantes discretos de tiempo, por los vértices de un grafo. Las posiciones de un instante para el siguiente se eligen de acuerdo a alguna regla probabilística. Supongamos que la fortuna de la jugadora  $A$  es representada por una partícula que camina en el intervalo discreto  $\llbracket 0, n \rrbracket$  (ver Figura 3). Entonces, cada vez que  $A$  gana un peso la partícula da un paso para la derecha,

FIGURA 3. Paseo aleatorio en  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

mientras que cada vez que  $A$  pierde un peso el paso es hacia la izquierda. En otras palabras, en cada instante discreto de tiempo, la partícula da un paso a la derecha con probabilidad  $p$  o a la izquierda con probabilidad  $1 - p$ , con  $p \in (0, 1)$ .

El evento  $A(i)$  definido en (1) puede ser interpretado, en este nuevo contexto, como el evento:  $A(i) = \{\text{la partícula llega al vértice } n \text{ antes de llegar al vértice } 0\}$ , donde la dependencia de  $i$  en la notación es para representar que la posición inicial de la partícula es el vértice  $i$ . Si denotamos la posición de la partícula en el  $k$ -ésimo instante de tiempo por  $Y_k$ ,  $k \geq 0$ , la sucesión  $(Y_k)_{k \geq 0}$  es conocida como paseo aleatorio en  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , con absorción en 0 o en  $n$ . Formalmente, el paseo aleatorio es una cadena de Markov a tiempo discreto. En este caso, para todo  $m \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(Y_{m+1} = i + 1 | Y_m = i) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_{m+1} = i - 1 | Y_m = i),$$

si  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  y, con el problema de la ruina del jugador en mente, suponemos que

$$\mathbb{P}(Y_{m+1} = 0 | Y_m = 0) = \mathbb{P}(Y_{m+1} = n | Y_m = n) = 1.$$

Por esto último es que decimos que el paseo es con absorción en 0 o en  $n$ . Notemos que si  $X_1, X_2, \dots$  son una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) tal que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1),$$

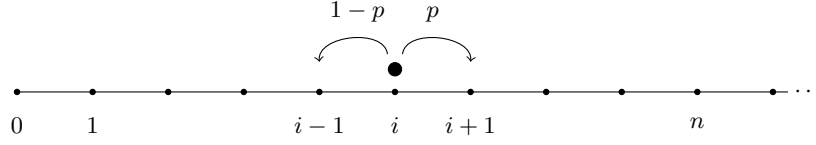
entonces,  $Y_m = Y_{m-1} + \tilde{X}_m$ , para  $m \geq 1$ , donde

$$\tilde{X}_m = \begin{cases} X_m, & \text{si } Y_m \notin \{0, n\}, \\ 0, & \text{si } Y_m \in \{0, n\}. \end{cases}$$

**2.2. Paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}^+$ .** Extendemos el modelo de paseo aleatorio de la sección anterior, definido en el intervalo discreto  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , para el conjunto de los enteros no negativos  $\mathbb{Z}^+$ . Para esto, suponemos que una partícula está localizada en algún vértice  $i \in \mathbb{Z}^+$  y que en cada instante discreto de tiempo salta con probabilidad  $p$  para el vértice  $i + 1$  o con probabilidad  $1 - p$  para el vértice  $i - 1$  (ver Figura 4). Por simplicidad, suponemos que si  $i = 0$  entonces la partícula saltará para el vértice 1 con probabilidad 1. Además asumimos que cada elección ocurre de forma independiente a las elecciones anteriores.

Formalmente, consideramos una sucesión de variables aleatorias i.i.d.  $X_1, X_2, X_3, \dots$  tal que  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1)$ . Observemos que si  $Y_0$  denota la posición inicial de la partícula entonces  $Y_n = Y_{n-1} + \tilde{X}_n$ , para todo  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , es la posición de la partícula en el  $n$ -ésimo instante de tiempo, donde

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} X_n, & \text{si } Y_n \neq 0, \\ 1, & \text{si } Y_n = 0. \end{cases}$$

FIGURA 4. Paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}^+$ .

Una pregunta interesante para este modelo es: ¿existe alguna chance de que la partícula nunca retorne a su posición inicial? Para formular esta pregunta de forma matemática definimos la variable aleatoria  $\tau_i^+ := \inf\{n \geq 1 : Y_n = i\}$ , con la convención de que  $\tau_i^+ = \infty$  si el ínfimo no es alcanzado. Entonces, lo que vamos a responder es si

$$\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) > 0 \text{ o } \mathbb{P}(\tau_i^+ < \infty | Y_0 = i) = 1.$$

En palabras, vamos a responder si hay una probabilidad positiva de que la partícula no retorne al vértice inicial  $i$  o, al contrario, si la partícula volverá a  $i$  con probabilidad 1. Como veremos en el siguiente resultado la respuesta depende de  $p$ .

**Teorema 1.** *Sea  $(Y_n)_{n \geq 0}$  el paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}^+$ . Para todo  $i \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) > 0$  si, y solamente si,  $p > 1/2$ .*

*Demostración.* Condicionando sobre el primer salto de la partícula, obtenemos

$$\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) = p \mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i, Y_1 = i + 1) + (1-p) \mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i, Y_1 = i - 1).$$

Un buen ejercicio es verificar que  $\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i, Y_1 = i - 1) = 0$  (piense en lo que implicaría lo contrario). Entonces  $\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) > 0$  si, y solamente si,

$$\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i, Y_1 = i + 1) > 0. \quad (6)$$

Para probar (6) asumimos que la partícula comienza en  $i + 1$  y, dada esta información, definimos los eventos  $B(n) = \{\text{la partícula visita el vértice } n + i \text{ antes de visitar el vértice } i\}$ , para cada  $n \geq 2$ . La sucesión  $(B(n))_{n \geq 2}$  es una sucesión no creciente de eventos pues  $B(n + 1) \subset B(n)$ , para todo  $n \geq 2$ . Luego, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n) = \bigcap_{n=2}^{\infty} B(n)$$

la continuidad de la probabilidad implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B(n)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{\infty} B(n)\right). \quad (7)$$

Por un lado, una comparación con el problema de la ruina del jugador nos permite concluir de (5) que

$$\mathbb{P}(B(n)) = \mathbb{P}(A(1)) = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)}{1 - (q/p)^n}, & \text{si } q \neq p, \\ 1/n, & \text{si } q = p. \end{cases}$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B(n)) = \begin{cases} 1 - (q/p), & \text{si } q < p, \\ 0, & \text{si } q \geq p. \end{cases} \quad (8)$$

Por otro lado, por la definición de los eventos  $B(n)$ , tenemos que

$$\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i, Y_1 = i + 1) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{\infty} B(n)\right). \quad (9)$$

Concluimos la prueba del teorema a partir de (7), (8), (9) y notando que  $q < p$  si, y solamente si,  $p > 1/2$ . □

**Observación 2.** *El Teorema 1 establece que existen dos comportamientos diferentes del paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}^+$ ; a saber,  $\mathbb{P}(\tau_i^+ = \infty | Y_0 = i) > 0$  que se llama comportamiento transitorio o  $\mathbb{P}(\tau_i^+ < \infty | Y_0 = i) = 1$  que se llama comportamiento recurrente. En la teoría de cadenas de Markov los estados, que en este caso son los valores  $i \in \mathbb{Z}^+$  de las variables aleatorias, son llamados de recurrentes o transitorios. Sin embargo, con un poco de trabajo adicional es posible mostrar que para el paseo aleatorio o todos los estados son recurrentes o todos los estados son transitorios. Esto es consecuencia de que el paseo aleatorio es una cadena de Markov irreducible. Para más detalles ver [34, Sección I.2].*

**2.3. Paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}$ .** Consideramos una sucesión de variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots$  i.i.d. con distribución común dada por  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1)$ , para  $p \in (0, 1)$ . Asumiendo que  $Y_0 = i$ , para algún  $i \in \mathbb{Z}$ , definimos inductivamente las variables aleatorias  $Y_n := Y_{n-1} + X_n$ , para todo  $n \geq 1$ . Llamamos paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}$  a la sucesión de variables aleatorias  $(Y_n)_{n \geq 0}$ . De la misma forma que en las secciones anteriores, esta sucesión de variables aleatorias puede ser interpretada como la posición de una partícula paseando por los enteros, asumiendo que inicia el paseo en el vértice  $i$  y realiza sucesivos pasos eligiendo, de forma independiente, saltar una unidad a la derecha con probabilidad  $p$  o a la izquierda con probabilidad  $1 - p$ . Nuestro objetivo es encontrar condiciones para garantizar la recurrencia o transitoriedad, como fue definido en la Observación 2, para este modelo.

**Teorema 2.** *Sea  $(Y_n)_{n \geq 0}$  el paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}$ . Para todo  $i \in \mathbb{Z}$  sea*

$$\tau_i := \inf\{n \geq 1 : Y_n = i\}.$$

*Entonces, para todo  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{P}(\tau_i = \infty | Y_0 = i) > 0$  si, y solamente si,  $p \neq 1/2$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad vamos a demostrar el resultado para  $i = 0$  (ver Observación 2). Como hemos hecho hasta ahora, vamos a obtener información sobre la probabilidad  $\mathbb{P}(\tau_0 = \infty | Y_0 = 0)$  condicionando sobre la variable aleatoria  $X_1$ , es decir, sobre el primer paso de la partícula. Notemos que

$$\mathbb{P}(\tau_0 = \infty | Y_0 = 0) = p \mathbb{P}(\tau_0 = \infty | Y_1 = 1) + (1 - p) \mathbb{P}(\tau_0 = \infty | Y_1 = -1). \quad (10)$$

Ahora observemos que, dado que  $Y_1 = 1$ , la probabilidad de que ocurra el evento  $\{\tau_0 = \infty\}$  es la misma que la probabilidad del evento  $\{\tau_0^+ = \infty\}$  dado que  $Y_0^{(D)} = 1$ , donde  $(Y_n^{(D)})_{n \geq 0}$  es un paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}^+$  definido como en la sección anterior. Luego, el Teorema 1 implica que

$$\mathbb{P}(\tau_0 = \infty | Y_1 = 1) > 0 \quad \text{si, y solamente si } p > 1/2. \quad (11)$$

De forma análoga, dado que  $Y_1 = -1$ , la probabilidad de que ocurra el evento  $\{\tau_0 = \infty\}$  es la misma que la probabilidad del evento  $\{\tau_0^+ = \infty\}$  dado que  $Y_0^{(I)} = 1$ , donde  $(Y_n^{(I)})_{n \geq 0}$  es un paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}^+$  pero con una probabilidad de salto a la derecha dada por  $1 - p$  y de salto a la izquierda dada por  $p$ . Luego, nuevamente por el Teorema 1

$$\mathbb{P}(\tau_0 = \infty | Y_1 = -1) > 0 \quad \text{si, y solamente si, } p < 1/2. \quad (12)$$

De (10), (11) e (12) podemos hacer dos conclusiones; por un lado, concluimos que si  $p > 1/2$  o  $p < 1/2$ , es decir si  $p \neq 1/2$ , entonces

$$\mathbb{P}(\tau_0 = \infty | Y_0 = 0) > 0;$$

por otro lado, podemos concluir que si  $p \leq 1/2$  y  $p \geq 1/2$ , es decir si  $p = 1/2$ , entonces

$$\mathbb{P}(\tau_0 < \infty | Y_0 = 0) = 1.$$

Finalmente, concluimos que el paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}$  es recurrente si, y solamente si,  $p = 1/2$ .  $\square$

El Teorema 2 afirma que solamente hay recurrencia para el paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}$  si  $p = 1/2$ . En este caso, la partícula tiene la misma chance de saltar para cualquiera de los dos vecinos de su posición actual. Un paseo aleatorio con esta propiedad se llama paseo aleatorio simétrico. El resultado de la siguiente proposición, que será importante en la próxima sección, afirma que si  $p \geq 1/2$  entonces, dado que la partícula sale de 0, todos los vértices a derecha de 0 serán visitados con probabilidad 1.

**Proposición 1.** *Sea  $(Y_n)_{n \geq 0}$  el paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}$ . Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  vale que*

$$\mathbb{P}(\tau_n < \infty | Y_0 = 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in [1/2, 1), \\ p/(1-p), & \text{se } p \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (13)$$

*Demostración.* Denotamos  $\beta_n := \mathbb{P}(\tau_n < \infty | Y_0 = 0)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y dejamos como ejercicio, interesante e importante, la prueba de que  $\beta_n = \beta_1^n$ . Por otro lado, condicionando sobre el primer salto de la partícula tenemos que

$$\beta_1 = p + q\beta_2 = p + q\beta_1^2, \quad (14)$$

donde usamos que  $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty | Y_0 = 0, Y_1 = 1) = 1$  y que  $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty | Y_0 = 0, Y_1 = -1) = \beta_2 = \beta_1^2$ . Las posibles soluciones para (14) son dadas por

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pq}}{2q},$$

y como  $1 = p + q = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ , tenemos que  $\sqrt{1 - 4pq} = |p - q|$ . Luego, las soluciones de (14) son dadas por 1 y  $p/q$ . Notemos que cuando  $p \in [1/2, 1)$ , es decir  $(p/q) \geq 1$ , la única solución posible es 1. Entonces  $\beta_1 = 1$  y  $\beta_n = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  si  $p \geq 1/2$ . Consideremos ahora  $p < 1/2$  o, lo que es lo mismo,  $(p/q) < 1$ . Notemos que esto implica que el paseo aleatorio es transitorio con la partícula teniendo una probabilidad mayor de saltar a la izquierda. Vamos a usar la primer igualdad de (14). Notemos que dado que la partícula da su primer salto para  $-1$ , que ocurre con probabilidad  $q$ , la probabilidad de que la partícula nunca más vuelva al 0 es dada por  $1 - (p/q)$  (se escapa por la izquierda, ver (8)). Luego, dada la ocurrencia de este evento tenemos que el vértice 1 nunca será visitado. Esto implica  $\beta_2 \leq 1 - \{1 - (p/q)\}$  y de (14) concluimos que:

$$\beta_1 \leq p + q\{1 - (1 - (p/q))\} = 2p < 1$$



pues  $p < 1/2$ . De esta forma concluimos que solo puede ser  $\beta_1 = p/q$  y por lo tanto  $\beta_n = (p/q)^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  si  $p < 1/2$ .  $\square$

Hasta ahora consideramos una partícula paseando en  $\mathbb{Z}$ . Una posible generalización en el estudio que acabamos de hacer es aumentar la dimensión del grafo y analizar la recurrencia o transitoriedad para el modelo resultante. En otras palabras, consideramos la red hipercúbica  $d$ -dimensional  $\mathbb{Z}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ . Es decir,  $\mathbb{Z}^d$  es el grafo cuyo conjunto de vértices es dado por  $\mathbb{Z}^d = \{v = (v_1, \dots, v_d) : v_i \in \mathbb{Z}\}$  y cuyo conjunto de aristas es dado por  $E^d = \{\{u, v\} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \|u - v\|_1 = 1\}$ , donde  $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^d |v_i|$  para cada  $v \in \mathbb{Z}^d$ . Una vez más, cometemos el abuso de notación de denotar el grafo por  $\mathbb{Z}^d$ , que de hecho es el conjunto de vértices. Por supuesto,  $\mathbb{Z}^1 = \mathbb{Z}$ . Cuando consideramos el paseo aleatorio simétrico en  $\mathbb{Z}^d$  con  $d \geq 1$ , es decir el paseo aleatorio con  $p = 1/2d$ , es posible probar el siguiente resultado sobre recurrencia o transitoriedad.

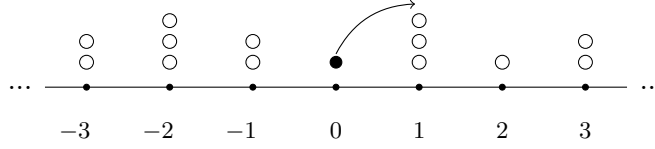
**Teorema de Pólya.** *El paseo aleatorio simétrico en  $\mathbb{Z}^d$  es recurrente si, y solamente si,  $d \in \{1, 2\}$ .*

*Demostración.* Omitida. Para una demostración usando un criterio de recurrencia y transitoriedad para cadenas de Markov a tiempo discreto, junto con argumentos combinatorios, ver [34, Capítulo 1]. Por otro lado, una demostración bastante interesante usando una relación que existe entre paseos aleatorios y redes eléctricas puede ser consultada en [16, Sección 1.5].  $\square$

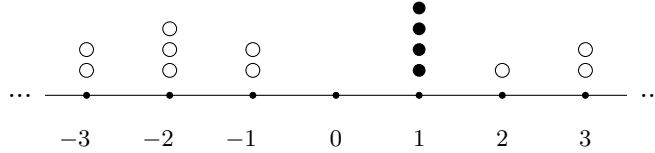
**2.4. Modelo de los sapos en  $\mathbb{Z}$ .** En la sección anterior vimos condiciones para garantizar recurrencia y transitoriedad del paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}$ . También comentamos que el paseo aleatorio simétrico en  $\mathbb{Z}^d$  es recurrente si, y solamente si,  $d \in \{1, 2\}$ . Esta es una forma de generalizar el modelo, es decir, aumentando la dimensión del grafo considerado. Ahora vamos a ver un tipo diferente de generalización: volvemos a considerar  $\mathbb{Z}$  pero aumentamos el número de partículas. Discutiremos la noción de recurrencia para un modelo definido a partir de no apenas una, sino de un sistema que puede estar formado por un número infinito de partículas realizando paseos aleatorios independientes en  $\mathbb{Z}$ . Más precisamente, consideramos el modelo de los sapos en  $\mathbb{Z}$  que puede ser descrito de la siguiente forma: en un instante inicial cada vértice  $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  está ocupado por  $\eta_i$  partículas, donde  $\eta := (\eta_i)_{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$  es una sucesión de valores enteros no negativos. En el vértice 0 hay apenas una partícula. Asumimos que hay dos tipos de partículas, las activas y las inactivas. Cada partícula activa realiza, de forma independiente a cualquier otra, un paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}$ , con probabilidad  $p$  de saltar a la derecha y probabilidad  $1 - p$  de saltar a la izquierda, con  $p \in (0, 1)$ . Por otro lado, cada partícula inactiva permanece inmóvil hasta que el vértice donde se encuentra es visitado por alguna partícula activa, en cuyo caso es activada. Como configuración inicial asumimos que apenas la partícula del 0 está activa y que todas las restantes están inactivas. En la Figura 5 ilustramos una posible realización del modelo, que llamamos modelo de los sapos en  $\mathbb{Z}$  con probabilidad de salto a derecha  $p$  e configuración inicial  $\eta$ .

**Definición 1.** *Decimos que el modelo de los sapos en  $\mathbb{Z}$  es recurrente si el 0 es visitado infinitas veces, por partículas activas, con probabilidad 1. Caso contrario decimos que el modelo es transitorio.*

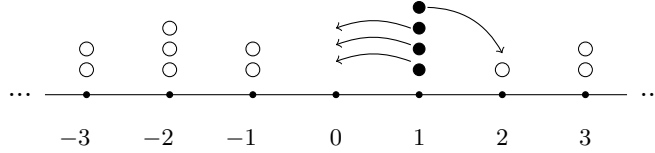
Notemos que debido a lo que ya discutimos sobre la recurrencia del paseo aleatorio simétrico en  $\mathbb{Z}$  podemos concluir que si  $p = 1/2$  entonces el modelo de los sapos es recurrente. En efecto, en este caso solamente la partícula activa inicial realizará infinitas visitas al vértice 0 con



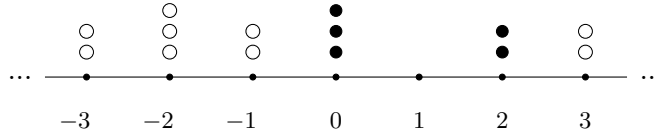
(a) La única partícula inicialmente activa elige un vértice vecino con probabilidad  $p$  (derecha), o  $1 - p$  (izquierda).



(b) En el instante  $n = 1$  la partícula inicialmente activa salta al vértice vecino elegido activando todas las partículas allí localizadas.



(c) Cada partícula activa elige un vértice vecino para saltar, de forma independiente, con probabilidades  $p$  (derecha) o  $1 - p$  (izquierda).



(d) Partículas inactivas son activadas cuando una partícula activa salta en el vértice donde se encuentran localizadas.

FIGURA 5. Primeros instantes del modelo de los sapos en  $\mathbb{Z}$ .

probabilidad 1. Recordemos que para  $p = 1/2$  esta partícula retorna al 0 con probabilidad 1. Entonces estudiamos el modelo para valores de  $p \neq 1/2$  y, por simetría, será suficiente considerar  $p \in (1/2, 1)$ .

**Teorema de Gantert y Schmidt (2009).** *Consideremos el modelo de los sapos en  $\mathbb{Z}$  con configuración inicial  $\eta$  y probabilidad de salto a derecha  $p \in (1/2, 1)$ . El modelo es recurrente si, y solamente si,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left( \frac{1-p}{p} \right)^i = \infty.$$

*Demostración.* Seguimos los argumentos de la prueba original del teorema (ver [13, Teorema 2.1]). Para facilitar la notación llamamos cada partícula inactiva que inicialmente está en el vértice  $j$  de  $j$ -partícula, para todo  $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Recordemos que, inicialmente, la partícula en

el vértice 0 es la única activa. Supongamos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left( \frac{1-p}{p} \right)^i = \infty,$$

y definamos para cada  $i \in \mathbb{Z}^+$  el evento  $A_i = \{\text{el vértice } -i \text{ es visitado por alguna } j\text{-partícula, para algún } j \geq 1\}$ . Como  $p > 1/2$  sabemos de la Proposición 1 que, con probabilidad 1, todas las  $j$ -partículas, para  $j \geq 1$ , serán activadas eventualmente por la partícula que comienza activa en el instante 0. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P} \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\text{alguna } j\text{-partícula visita } -i\} \right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} \{\text{ninguna } j\text{-partícula visita } -i\} \right) \\ &= 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^m \left( 1 - \left\{ \frac{1-p}{p} \right\}^{j+i} \right)^{\eta_j} \end{aligned}$$

donde la última igualdad es obtenida por el hecho de que la sucesión de eventos

$$\bigcap_{j=1}^m \{\text{ninguna } j\text{-partícula visita } -i\}$$

es no creciente – esto nos permite aplicar la continuidad de la probabilidad – seguido de la independencia de los paseos aleatorios asociados a las diferentes partículas y que  $\{(1-p)/p\}^{j+i}$  es la probabilidad de que una  $j$ -partícula, una vez activada, visite eventualmente el vértice  $-i$  (nuevamente por la Proposición 1). Ahora, como  $1 - x \leq e^{-x}$  para  $x \in [0, 1]$  tenemos que para todo  $m \geq 1$

$$\prod_{j=1}^m \left( 1 - \left\{ \frac{1-p}{p} \right\}^{j+i} \right)^{\eta_j} \leq e^{-\sum_{j=1}^m \eta_j \{(1-p)/p\}^{j+i}},$$

y tomando límite cuando  $m \rightarrow \infty$  en ambos lados de la desigualdad anterior concluimos que  $\mathbb{P}(A_i) = 1$  para todo  $i \in \mathbb{Z}^+$ . Luego, como la probabilidad de la intersección de eventos de probabilidad igual a 1 también es 1 tenemos que

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i \right) = 1.$$

Como cada partícula activa realiza un paseo aleatorio transitorio con probabilidad de salto a la derecha dada por  $p > 1/2$ , si  $B_i$  denota el evento que alguna  $(-i)$ -partícula, una vez activada, visita el 0, para  $i \in \mathbb{Z}^+$ , entonces  $\mathbb{P}(B_i) = 1$  y concluimos como antes que

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} B_i \right) = 1.$$

Finalmente, si  $A$  denota el evento que la partícula activa inicialmente en el vértice 0 visitará todos los vértices de  $\mathbb{Z}^+$  concluimos que

$$\mathbb{P}(0 \text{ visitado infinitas veces}) = \mathbb{P}\left(0 \text{ visitado infinitas veces} \mid A, \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i, \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} B_i\right) = 1.$$

Para demostrar la otra parte del teorema, supongamos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left(\frac{1-p}{p}\right)^i < \infty,$$

y notemos que

$$\mathbb{P}(0 \text{ ser visitado infinitas veces}) \leq \mathbb{P}(-1 \text{ ser visitado al menos una vez}). \quad (15)$$

De hecho, un argumento basado en el Lema de Borel-Cantelli (ver por ejemplo [34, página 170]) permite mostrar que, dado que 0 es visitado infinitas veces, la probabilidad de que  $-1$  sea visitado al menos una vez es igual a 1. Luego, usando la independencia de los paseos aleatorios y razonando como en la primer parte de la demostración tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-1 \text{ ser visitado al menos una vez}) &= 1 - \mathbb{P}(-1 \text{ nunca es visitado}) \\ &= 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{p} \prod_{j=1}^m \left(1 - \left\{\frac{1-p}{p}\right\}^{j+1}\right)^{\eta_j} \right\} \\ &\leq 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{p} \prod_{j=1}^m \left(1 - \eta_j \left\{\frac{1-p}{p}\right\}^{j+1}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

La última desigualdad es consecuencia de la Desigualdad de Bernoulli (ver por ejemplo [30]): si  $x > -1$  y  $n \in \mathbb{Z}^+$  entonces  $(1+x)^n \geq 1+nx$ . Para finalizar recurrimos a un útil resultado para productos infinitos (ver [6, Teorema 1.9, página 422]): si  $(x_n)_{n \geq 0}$  es una sucesión de números del intervalo  $[0, 1)$  entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m (1 - x_i) = 0 \text{ si, y solamente si, } \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty.$$

Entonces, por la hipótesis y el resultado anterior para productos infinitos, tenemos que

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \eta_j \left\{\frac{1-p}{p}\right\}^{j+1}\right) > 0 \quad (17)$$

y así concluimos de (15)–(17) que el modelo de los sapos es transitorio.  $\square$

El teorema anterior es el primero de los resultados obtenidos por Gantert y Schmidt en [13]. En dicho trabajo los autores también dieron criterios para garantizar recurrencia o transitoriedad para el modelo de los sapos en el caso en que las  $\eta_x$  son variables aleatorias. Más recientemente, en [9], se obtuvieron resultados sobre la recurrencia del modelo de los sapos en  $\mathbb{Z}^d$ , para  $d \geq 2$ . Otros resultados también recientes sobre recurrencia de este modelo en otros tipos de grafos pueden ser encontrados en [19] y en sus referencias.

**Un poco más sobre el modelo.** *La literatura relacionada con el modelo de los sapos es amplia. Si bien citamos trabajos recientes, los primeros resultados se encuentran en [2, 3], donde los autores lo estudiaron en grafos infinitos. Entre las primeras versiones se asume que cada partícula tiene un tiempo de vida, después del cual la partícula es retirada del grafo. Este tiempo puede ser dado por una variable aleatoria geométrica de parámetro  $p$ . Para estas versiones uno de los problemas de interés ha sido el estudio de la sobrevivencia del modelo, definida como el evento en que en cada instante de tiempo existe alguna partícula activa en el grafo. Esta y otras variantes se encuentran en [2, 3, 12, 26, 27] y en sus referencias. Para una revisión sobre resultados del modelo en grafos finitos una buena lectura es [1, 4]. Como una aplicación, citamos [29] donde se comparó una versión del modelo definida en el grafo completo con modelos matemáticos existentes en la literatura para describir la transmisión de una información en una población. En este sentido, podemos interpretar que partículas activas representan agentes portadores de una información y que la transmiten para agentes desinformados, representados por partículas inactivas. Como una consecuencia de esta comparación, el modelo de rumores estudiado en [28] puede ser interpretado como una generalización del modelo de los sapos en el grafo completo estudiado en [24].*

### 3. UN NUEVO MODELO DE PERCOLACIÓN EN ÁRBOLES

(Muy) informalmente hablando, los modelos de percolación son estructuras aleatorias en las cuales el interés principal es observar la existencia de caminos sujetos a ciertas reglas probabilísticas. Se trata de una teoría rica en resultados y aplicaciones. Si bien el propósito de esta sección es discutir sobre un modelo bastante reciente de percolación, comenzamos con una breve descripción sobre el modelo básico.

**3.1. Percolación independiente de aristas.** El modelo básico de percolación aparece en la literatura en 1957 de la mano de Broadbent y Hammersley quienes en [7] lo propusieron como un modelo matemático simple para representar el transporte de un fluido a través de un medio poroso. Tal fenómeno es conocido como percolación y un ejemplo – bastante conocido por un número considerable de matemáticos y matemáticas – se ve en la preparación de un café molido; cuando uno espera el paso del agua a través del café. En general el medio es formado por poros y canales microscópicos por donde pasaría el fluido y la característica que se quiere representar es el hecho de que cada canal puede estar abierto o cerrado al paso del fluido.

El modelo, en sí, es un modelo probabilístico formado por una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. El medio es representado por la red hipercúbica  $d$ -dimensional  $\mathbb{Z}^d = (V, E)$ . Recordemos que  $\mathbb{Z}^d$  es el grafo con conjunto de vértices dado por  $\mathbb{Z}^d = \{v = (v_1, \dots, v_d) : v_i \in \mathbb{Z}\}$  y con conjunto de aristas dado por  $E^d = \{\{u, v\} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \|u - v\|_1 = 1\}$ , donde  $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^d |v_i|$  para cada  $v \in \mathbb{Z}^d$ . Los vértices del grafo representan los poros del medio mientras que las aristas representan los canales conectando dichos poros. Las variables aleatorias son asociadas a las aristas del grafo con la intención de representar cuando un determinado canal está abierto, o no, al paso del fluido. Más precisamente, llamamos modelo de percolación independiente de aristas en  $\mathbb{Z}^d$  con parámetro  $p$  a la familia de variables aleatorias independientes  $(X_e)_{e \in E}$ , con  $X_e \sim \text{Bernoulli}(p)$  para  $p \in (0, 1)$ . Es decir,  $\mathbb{P}(X_e = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_e = 0)$ . Si  $X_e = 1$  decimos que el canal representado por la arista  $e$  está abierto, caso contrario decimos que el canal está cerrado. En lo que sigue diremos apenas que son las aristas que están abiertas o cerradas. Como se puede ver, fijada la dimensión del grafo,

el parámetro del modelo es la probabilidad  $p$  con la cual cada arista está abierta. En la Figura 6 se ilustramos algunas realizaciones del modelo de percolación para diferentes valores de  $p$ .

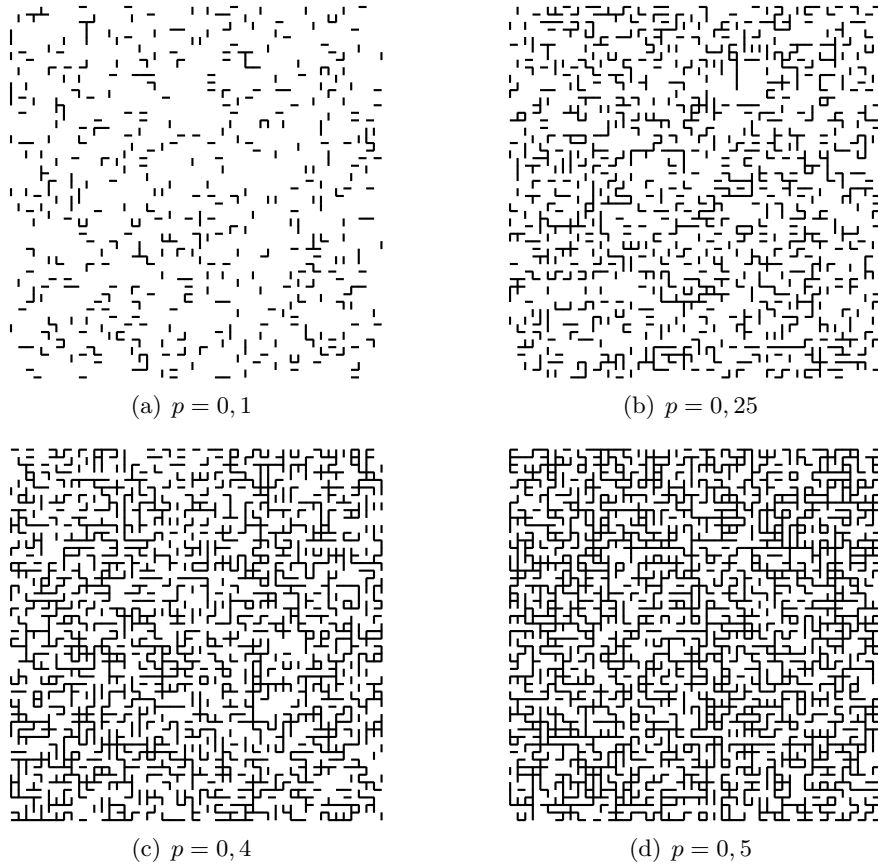


FIGURA 6. Realización del modelo de percolación de aristas en una región de  $\mathbb{Z}^2$  para diferentes valores de  $p$ .

En notación de grafos, si  $\{u, v\} \in E$  decimos que  $u, v$  son vecinos, lo que denotamos por  $u \sim v$ , y un camino del grafo es una sucesión  $v_0, v_1, \dots, v_n$  de vértices tal que  $v_i \sim v_{i+1}$ , para cada  $i$ . Para el modelo de percolación, la pregunta de interés es si, con probabilidad positiva, existe un camino formado por infinitos vértices tal que las respectivas aristas están todas abiertas. Si tal evento ocurre decimos que hay percolación. La respuesta a esta pregunta depende de  $p$ , como anticipamos en la ilustración de la Figura 6. Una forma de estudiar esta pregunta es a través del estudio de  $\theta(p, d)$ , que es la probabilidad de haber percolación cuando consideramos el modelo en  $\mathbb{Z}^d$  con parámetro  $p$ . Para una formalización más detallada, pero resumida, del modelo y de los primeros resultados recomendamos la lectura de [11] o [16, Capítulo 3]. Ya para un estudio más completo sobre la teoría de percolación recomendamos la lectura de [15]. Aquí resumimos las principales ideas que llevan a probar la existencia de un comportamiento conocido como transición de fase. Este es el nombre que se da cuando hay un cambio brusco en el comportamiento global de un sistema en algún valor del parámetro. En este caso, veremos que el cambio se da en  $p$  y el valor en el que la transición se lleva a cabo se llama parámetro crítico. Para enunciar el resultado denotamos por  $\mathcal{C}$  al conjunto de vértices

de  $\mathbb{Z}^d$  que están conectados al origen a través de un camino de aristas abiertas. Notemos que  $\mathcal{C}$  es un conjunto aleatorio. Entonces,  $\theta(p, d) = \mathbb{P}(|\mathcal{C}| = \infty)$ .

**Teorema 3.** *Para  $d \geq 2$ , existe un valor crítico  $p_c(d) \in (0, 1)$  tal que*

- i.  $\theta(p, d) = 0$  se  $p < p_c(d)$
- ii.  $\theta(p, d) > 0$  se  $p > p_c(d)$ .

*Demostración.* La prueba se puede separar en tres pasos. El primer paso es mostrar que el parámetro crítico  $p_c(d)$  que identifica las dos fases del modelo, entre  $\theta(p, d) = 0$  o  $\theta(p, d) > 0$ , puede ser definido. Los pasos siguientes buscan garantizar que, una vez definido, tal parámetro crítico no es ni 0 ni 1, es decir, el parámetro crítico es no trivial en el sentido que  $p_c(d) \in (0, 1)$ . Esto es realizado encontrando una cota inferior de  $p_c(d)$  que sea positiva (segundo paso de la prueba) y una cota superior que sea menor que 1 (tercer paso de la prueba). Resumimos aquí las ideas principales para cada parte e indicamos [11, 16] para un primer contacto con la teoría y un estudio más detallado de los resultados básicos.

**Paso 1.** Definimos  $p_c(d) := \inf\{p \in [0, 1] : \theta(p, d) > 0\}$ , lo que es posible porque la función  $\theta(p, d)$  es no decreciente como función de  $p$ . Para mostrar que  $\theta(p_1, d) \leq \theta(p_2, d)$  si  $p_1 < p_2$  recurrimos a un argumento de acoplamiento. Formalmente, este argumento se trata de construir ambos modelos de percolación, de parámetros  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente, en un mismo espacio de probabilidad de forma tal que los podemos comparar y garantizar que la existencia de percolación en el modelo asociado a  $p_1$  implica percolación en el otro modelo. Nos limitamos a entender porqué una arista abierta en el modelo de parámetro  $p_1$  implica que la misma arista estará abierta en el modelo de parámetro  $p_2$ . Consideramos una variable aleatoria uniforme  $U \sim U(0, 1)$  y definimos las variables:

$$X_e(p_1) := \begin{cases} 1, & \text{se } U \leq p_1, \\ 0, & \text{se } U > p_1, \end{cases} \quad \text{e} \quad X_e(p_2) := \begin{cases} 1, & \text{se } U \leq p_2, \\ 0, & \text{se } U > p_2. \end{cases}$$

Notemos que, así definidas,  $X_e(p_1) \sim \text{Bernoulli}(p_1)$ ,  $X_e(p_2) \sim \text{Bernoulli}(p_2)$  y  $X_e(p_1) \leq X_e(p_2)$ , donde la desigualdad anterior ocurre con probabilidad 1. Esta idea se puede extender a toda la familia de variables aleatorias involucradas en cada modelo – las cuales son definidas a partir de una misma familia de variables aleatorias i.i.d. uniformes en  $(0, 1)$  – para garantizar que  $\mathcal{C}_{p_1} \subset \mathcal{C}_{p_2}$  con probabilidad 1. Luego,  $\theta(p_1, d) \leq \theta(p_2, d)$ . El acoplamiento de objetos aleatorios es una herramienta muy usada en teoría de la probabilidad. De hecho, esa es la manera de formalizar las comparaciones realizadas entre el paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}$  y los paseos aleatorios en  $\mathbb{Z}^+$  durante la prueba del Teorema 2. Una buena referencia básica para leer un poco más sobre acoplamientos entre paseos aleatorios es [34, Sección I.5].

**Paso 2.**  $p_c(d) > 0$ . Un camino autoevitante, o *self-avoiding walk*, es un camino que une dos vértices de un grafo con la condición de que el camino no pasa por el mismo vértice más de una vez. Para  $d$  fijo, denotamos por  $\sigma_n$  el número de caminos autoevitantes de longitud  $n$  que comienzan en el origen de  $\mathbb{Z}^d$ . Como estos caminos son formados por aristas del grafo y como estas aristas pueden estar abiertas o cerradas dependiendo de la realización de las variables aleatorias asociadas denotamos por  $N_n$  el número de caminos autoevitantes de longitud  $n$  tales que todas sus aristas están abiertas. Si denotamos, para  $i \in \{1, \dots, \sigma_n\}$ , por  $\mathbf{1}_i$  la variable aleatoria indicadora del evento de que todas las aristas del  $i$ -ésimo camino autoevitante de longitud  $n$  comenzando en el origen están abiertas, entonces  $N_n = \sum_{i=1}^{\sigma_n} \mathbf{1}_i$ , y así

$$\mathbb{E}(N_n) = \sigma_n p^n. \tag{18}$$

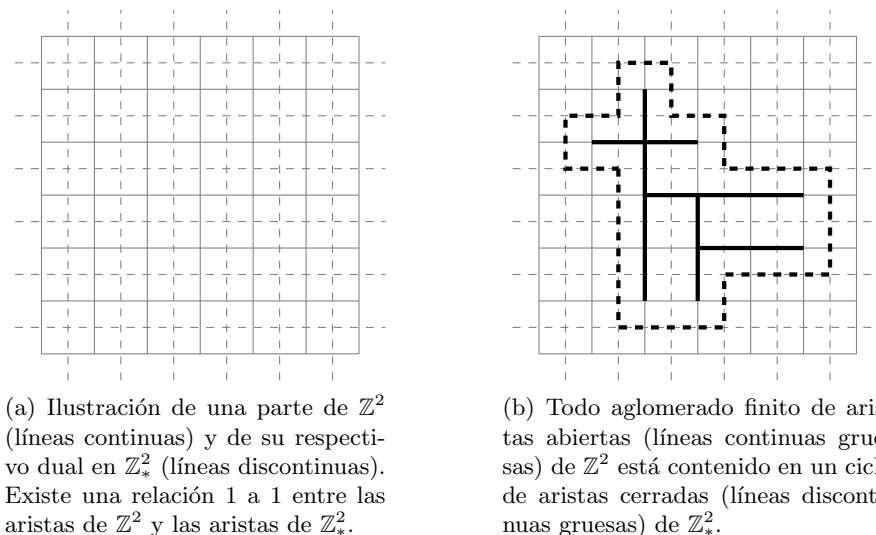


FIGURA 7. Red hipercúbica bidimensional, su dual y el argumento de Peierls.

Por otro lado, la sucesión de eventos  $\{N_n \geq 1\}$ , para  $n \geq 1$ , es no creciente. Entonces,

$$\mathbb{P}(|\mathcal{C}| = \infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{N_n \geq 1\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_n \geq 1), \quad (19)$$

donde la primer identidad es consecuencia de la equivalencia de los respectivos eventos – note que la ocurrencia de uno implica la ocurrencia del otro y vice-versa – y la segunda identidad es consecuencia de la continuidad de la probabilidad. Finalmente, la desigualdad de Markov implica que  $\mathbb{P}(N_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(N_n)$  que, junto con (18) y (19) nos lleva a concluir que  $\theta(p, d) = 0$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n p^n = 0$ . Para finalizar es suficiente observar que una posible cota superior para  $\sigma_n$  es dada por  $2d(2d - 1)^{n-1}$  y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2d}{2d - 1} \{(2d - 1)p\}^n = 0$$

si  $p < 1/(2d - 1)$ . En otras palabras, acabamos de mostrar que  $p_c(d) \geq 1/(2d - 1) > 0$ .

**Paso 3.**  $p_c(d) < 1$ . La primera observación es que  $\theta(p, d)$  es no decreciente como función de  $d$ . La prueba es nuevamente por acoplamiento de modelos de percolación, ahora con el mismo parámetro  $p$  pero en diferentes dimensiones. Notemos que una realización del modelo de percolación en  $\mathbb{Z}^d$  se puede identificar con una realización en un hiperplano del modelo de percolación en  $\mathbb{Z}^{d+1}$ . Luego, queda en evidencia que percolación en  $d$  dimensiones implica la ocurrencia de percolación en  $d + 1$  dimensiones. De esta forma uno puede concluir que  $\theta(p, d) \leq \theta(p, d + 1)$ , lo que implica que  $p_c(d) \geq p_c(d + 1)$ , para todo  $d \geq 2$ . Entonces para mostrar que  $p_c(d) < 1$  es suficiente mostrar que  $p_c(2) < 1$ . El argumento usado para esta prueba consiste en considerar la red bidimensional dual de  $\mathbb{Z}^2$ ; es decir, consideramos  $\mathbb{Z}_*^2 := \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2)$  (ver Figura 7(a)). Luego, cualquier realización del modelo de percolación en  $\mathbb{Z}^2$  induce una realización de un modelo de percolación en  $\mathbb{Z}_*^2$ . Esto es hecho abriendo una arista de  $\mathbb{Z}_*^2$  siempre que la respectiva arista de  $\mathbb{Z}^2$  que la atraviesa esté abierta.



Ahora, nos auxiliamos del modelo de percolación en  $\mathbb{Z}_*^2$  para obtener el resultado de interés para  $\mathbb{Z}^2$ . El argumento que usaremos es conocido como argumento de Peierls debido a que fue usado por este para una prueba de transición de fase del modelo de Ising bidimensional. Denotamos por  $X_n$  el número de ciclos de longitud  $n$  de  $\mathbb{Z}_*^2$  que contienen  $(0, 0)$  en su interior y tales que todas sus aristas están cerradas. Observe que

$$\{|\mathcal{C}| < \infty\} = \bigcup_{n=4}^{\infty} \{X_n \geq 1\}.$$

Es decir, usamos el hecho que si el conjunto  $\mathcal{C}$  es finito, entonces existe un ciclo de  $\mathbb{Z}_*^2$  que contiene  $(0, 0)$  y tal que todas sus aristas están cerradas, ver Figura 7(b). Entonces,

$$\mathbb{P}(|\mathcal{C}| < \infty) \leq \sum_{n=4}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \sum_{n=4}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) \leq \sum_{n=4}^{\infty} n4^n(1-p)^n, \quad (20)$$

donde hemos usado la desigualdad de Markov y el hecho de que el número de ciclos de longitud  $n$  rodeando el  $(0, 0)$  es de máximo  $n4^n$  ciclos. Como,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \{4(1-p)\}^{n-1} = \frac{1}{1-16(1-p)^2}, \quad (21)$$

si  $p \in (3/4, 1]$  y como

$$\frac{4(1-p)}{1-16(1-p)^2} < 1 \text{ si, y solamente si, } p > \frac{9-\sqrt{5}}{8}, \quad (22)$$

concluimos de (20)-(22) que  $p_c(2) \leq \frac{9-\sqrt{5}}{8} < 1$ . □

**Un poco más sobre el modelo.** *Es un ejercicio simple verificar que  $p_c(1) = 1$ . Por otro lado, ha sido un gran trabajo de Kesten en [21] demostrar que  $p_c(2) = 1/2$ . Parte de las ideas para hacer esta demostración pueden encontrarse en [11, Capítulo 5] o en [15, Capítulo 11]. Continúa en abierto conocer el valor exacto para  $p_c(d)$  con  $d \geq 3$ . Una buena descripción informal sobre los desafíos que el estudio de este modelo han aportado para la matemática fue escrita por el propio Kesten en [22]. El modelo de percolación independiente de aristas dio origen a toda una teoría en la que se incluyen una serie de modelos de estructuras aleatorias cuyo punto de partida es la identificación de caminos obedeciendo reglas probabilísticas. En [15, Capítulo 12] se incluyen varias extensiones de este modelo.*

**3.2. Percolación accesible.** Este modelo de percolación está inspirado en cuestiones de biología evolutiva y fue propuesto por Nowak e Krug en [31] quienes describieron su motivación de la siguiente forma: imagine una población de alguna forma de vida dotada del mismo tipo genético (genotipo). Si ocurre una mutación, se crea un nuevo genotipo que puede desaparecer o reemplazar al anterior. Siempre que la selección natural sea lo suficientemente fuerte, esto último solo ocurre si el nuevo genotipo tiene una mayor aptitud. Como consecuencia, en grandes escalas de tiempo, el genotipo de la población sigue un camino a través del espacio de genotipos a lo largo del cual la aptitud aumenta monótonamente. Entonces, es de interés buscar este tipo de caminos.

Recomendamos la lectura de [31] y sus referencias para un estudio más profundo sobre esta motivación. A groso modo, el modelo es formulado usando un grafo (infinito) conexo  $G = (V, E)$  (que en particular será un árbol) y una familia de variables aleatorias absolutamente continuas i.i.d.  $(X_v)_{v \in V}$ . El interés es encontrar condiciones para garantizar la existencia de

caminos formados por un número infinito de vértices, digamos  $v_1, v_2, v_3, \dots$ , tales que las respectivas variables aleatorias asociadas están en orden creciente, es decir:  $X_{v_1} < X_{v_2} < X_{v_3} < \dots$ .

Antes de enunciar los resultados para este modelo recordamos notación adicional de grafos y en particular de árboles. Usamos  $\mathbb{T} = (V, E)$  para denotar un árbol, es decir, un grafo conexo y sin ciclos. Para cada árbol de esta sección identificamos un vértice que llamamos raíz y lo denotamos por  $\mathbf{0}$ . El grado de un vértice  $v$ , denotado por  $\text{grado}(v)$ , es el número de sus vecinos. Como  $\mathbb{T}$  es un árbol, existe un único camino conectando cualquier par de vértices  $u, v$ . Luego, la distancia entre estos vértices, denotada por  $d(u, v)$ , es el número de aristas en dicho camino. Para cada  $v \in V$  denotamos  $|v| := d(\mathbf{0}, v)$ . Para  $u, v \in V$ , decimos que  $u \leq v$  si  $u$  es uno de los vértices en el camino que conecta  $\mathbf{0}$  con  $v$ ;  $u < v$  si  $u \leq v$  y  $u \neq v$ . Decimos que  $v$  es un descendiente de  $u$  si  $u \leq v$  y que  $v$  es un hijo de  $u$  si  $u < v$  y  $u \sim v$ . Para  $n \geq 1$ , denotamos por  $\partial\mathbb{T}_{d,n}$  el conjunto de vértices a distancia  $n$  de la raíz del árbol y lo llamamos el  $n$ -ésimo nivel del árbol. Es decir,  $\partial\mathbb{T}_{d,n} = \{v \in \mathbb{T}_d : |v| = n\}$ . En el caso de árboles finitos, los vértices con grado 1 son llamados las hojas del árbol y la máxima distancia entre estos vértices y la raíz es llamada la altura del árbol.

*3.2.1. Árboles  $n$ -arios.* El modelo fue propuesto inicialmente en árboles  $n$ -arios completos por Nowak y Krug en [31] y, como veremos, el primer resultado obtenido fue la existencia de una transición de fase. Un árbol  $n$ -ario completo es un árbol finito tal que todos los vértices del árbol exceptuando las hojas, poseen exactamente  $n$  hijos. Ver Figura 8(a) para un ejemplo de un árbol binario ( $n = 2$ ). Por simplicidad nos referimos a estos árboles apenas como árboles  $n$ -arios. Consideramos un árbol  $n$ -ario de altura  $h$  y asociamos para cada vértice  $v \neq \mathbf{0}$  una variable aleatoria  $X_v$  con distribución uniforme en  $(0, 1)$ . Suponemos que todas las variables son independientes entre si. Para  $\mathbf{0}$  asociamos el valor 0. El interés es estudiar la existencia de un camino de vértices,  $v_1, v_2, \dots, v_h$ , conectando  $\mathbf{0}$  con alguna hoja del árbol, tal que  $X_{v_1} < X_{v_2} < \dots < X_{v_h}$ . Tal camino se llama camino accesible y puede definirse, en general, de la siguiente forma.

**Definición 2.** *Dado un árbol  $\mathbb{T}$  decimos que un camino  $v_0, v_1, \dots, v_n$  en  $\mathbb{T}$  es accesible si*

$$X_{v_0} < X_{v_1} < X_{v_2} < \dots < X_{v_n}.$$

*Denotamos este evento por  $v_0 \xrightarrow{c.a.} v_n$ .*

Para el árbol  $n$ -ario de altura  $h$ , que denotamos  $\mathbb{T}_n(h)$ , denotamos por  $N_h$  el número de caminos accesibles conectando  $\mathbf{0}$  con alguna de las hojas del árbol. Es decir,

$$N_h := \sum_{i=1}^{n^h} I_i, \quad (23)$$

donde  $I_i$  es una variable aleatoria indicadora del evento  $\mathbf{0} \xrightarrow{c.a.} u_i$  con  $u_i$  denotando la  $i$ -ésima hoja de  $\mathbb{T}_n(h)$ . Notemos que en este caso hay  $n^h$  hojas. En [31] se estudia el comportamiento de esta variable cuando  $n$  depende de  $h$  de forma lineal y  $h \rightarrow \infty$ .

**Teorema de Nowak y Krug (2013).** *Si  $n := n(h) = \alpha h$ , donde  $\alpha > 0$  es una constante, entonces*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_h \geq 1) \begin{cases} = 0, & \text{si } \alpha \leq e^{-1}, \\ > 0, & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

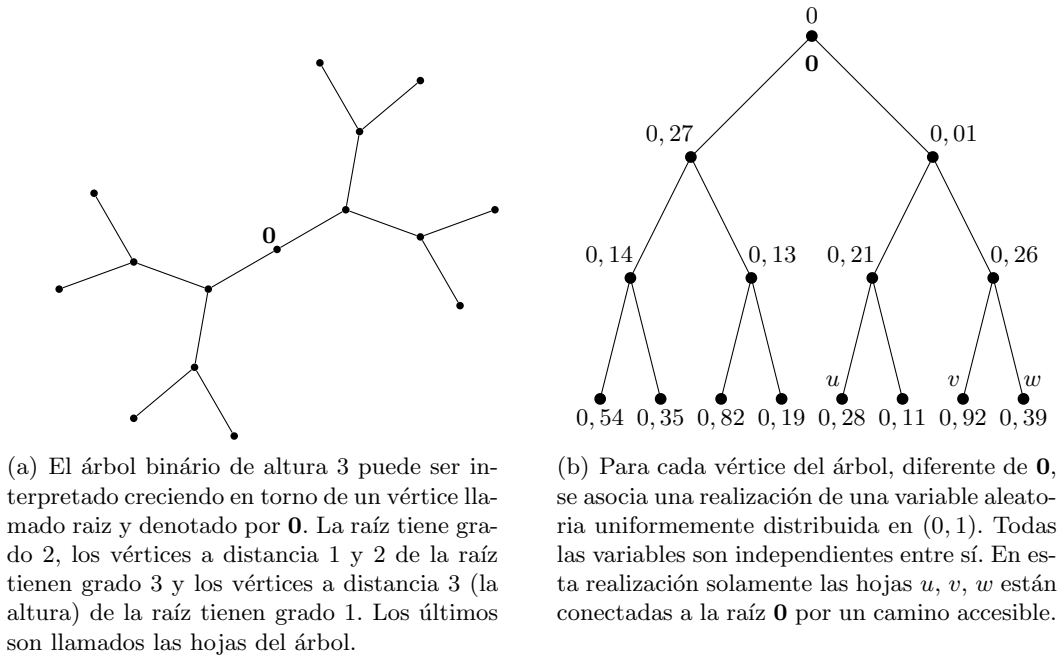


FIGURA 8. Modelo de percolación accesible en un árbol binario de altura 3.

*Demostración.* La idea de la demostración consiste en usar los métodos del primer y segundo momento para encontrar cotas inferiores y superiores de la probabilidad de interés. Es decir, usamos las siguientes desigualdades para variables aleatorias no negativas:

$$\mathbb{E}(N_h) \geq \mathbb{P}(N_h \geq 1) \geq \frac{\mathbb{E}(N_h)^2}{\mathbb{E}(N_h^2)}.$$

Ahora notamos que  $\mathbb{E}(N_h) = n^h/h!$ , pues hay  $n^h$  vértices a distancia  $h$  de la raíz y para  $h$  variables aleatorias i.i.d. tenemos que  $\mathbb{P}(X_1 < X_2 < \dots < X_h) = 1/h!$  Por otro lado, usando la representación de  $N_h$  dada en (23) y trabajando con el grado de dependencia de las variables  $I_i$  podemos obtener la siguiente cota superior para  $\mathbb{E}(N_h^2)$ :

$$\mathbb{E}(N_h^2) \leq \mathbb{E}(N_h) + \mathbb{E}(N_h)^2 + \sum_{k=1}^{h-1} \binom{2k}{k} \frac{n^{h+k}}{(h+k)!}. \quad (24)$$

Luego, obtenemos el resultado aplicando de forma conveniente la fórmula de Stirling,  $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ , para encontrar aproximaciones de las cotas encontradas. La notación  $\sim$  en la fórmula representa el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1.$$

Para más detalles de esta demostración, principalmente para la justificación de (24), la cual no es trivial y requiere cierto trabajo, sugerimos al lector o a la lectora consultar a la fuente original [31, Página 3].  $\square$

**Observación 3.** *Con los mismos argumentos podemos demostrar que si  $n = \alpha(h)h$  entonces  $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_h \geq 1) = 0$ , si  $\alpha(h) \rightarrow 0$ , y que  $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_h \geq 1) = 1$ , si  $\alpha(h) \rightarrow \infty$ , cuando  $h \rightarrow \infty$ .*

El Teorema de Nowak y Krug muestra la existencia de una transición de fase para el modelo. A partir de este punto una pregunta natural es: ¿qué pasa cuando  $\alpha \in (e^{-1}, 1]$ ? La respuesta apareció el mismo año en un trabajo de Roberts y Zhao.

**Teorema de Roberts y Zhao (2013).** *Si  $n = \alpha h$ , con  $\alpha > e^{-1}$ , entonces*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_h \geq 1) = 1.$$

*Demostración.* Omitida. Ver [32, Teorema 1] □

**Observación 4.** *Podemos resumir los dos teoremas anteriores diciendo que si  $n = \alpha h$  entonces existe un valor crítico del parámetro  $\alpha$ ,  $\alpha_c = e^{-1}$ , tal que*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_h \geq 1) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \leq \alpha_c, \\ 1, & \text{si } \alpha > \alpha_c. \end{cases}$$

**3.2.2. Árboles esféricamente simétricos.** Como vimos en la sección anterior, el primer modelo propuesto de percolación accesible es definido en árboles finitos  $n$ -arios y la existencia de caminos accesibles conectando la raíz con las hojas del árbol se estudia cuando la altura tiende para  $\infty$ . Aquí nos proponemos definir el modelo directamente en un árbol con infinitos vértices y, fijado el árbol, estudiamos la existencia de tales caminos accesibles. Adicionalmente, a diferencia del modelo de Nowak y Krug, suponemos que la raíz también tiene una variable aleatoria asociada. Esta versión fue propuesta inicialmente por Coletti et al. en [8] y una extensión para árboles aleatorios fue estudiada en [5]. El contenido de esta sección está basado principalmente en [8].

Nuestro objetivo será responder la siguiente pregunta: ¿para qué condiciones del árbol podemos garantizar la existencia de un camino formado por un número infinito de vértices,  $\mathbf{0}, v_1, v_2, \dots$ , tal que  $X_{\mathbf{0}} < X_{v_1} < X_{v_2} < \dots$  con probabilidad  $> 0$ ? Fijando un árbol  $\mathbb{T}$ , consideramos

$$\Lambda_n := \Lambda_n(\mathbb{T}) = \bigcup_{v \in \partial \mathbb{T}_n} \{\mathbf{0} \xrightarrow{c.a.} v\},$$

donde  $\mathbf{0} \xrightarrow{c.a.} v$  es el evento de la Definición 2. En palabras,  $\Lambda_n$  es el evento que el  $n$ -ésimo nivel del árbol está conectado a la raíz por un camino accesible.

**Definición 3.** *Decimos que hay percolación accesible en  $\mathbb{T}$  si el evento  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$  ocurre.*

Como se hace usualmente en modelos de percolación, vamos a estudiar

$$\theta(\mathbb{T}) := \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda_n).$$

Usamos la notación  $\mathbb{T}_1 \prec \mathbb{T}_2$  para decir que  $\mathbb{T}_1$  es un sub-grafo de  $\mathbb{T}_2$  y que los árboles  $\mathbb{T}_1$  y  $\mathbb{T}_2$  tienen la misma raíz. Así, no es difícil probar que si  $\mathbb{T}_1 \prec \mathbb{T}_2$ , entonces  $\theta(\mathbb{T}_1) \leq \theta(\mathbb{T}_2)$ . De hecho, notemos que todo camino accesible de  $\mathbb{T}_1$  será un camino accesible de  $\mathbb{T}_2$ .

A partir de ahora, ponemos la atención en árboles cuyo crecimiento es, de cierta forma, manejable.

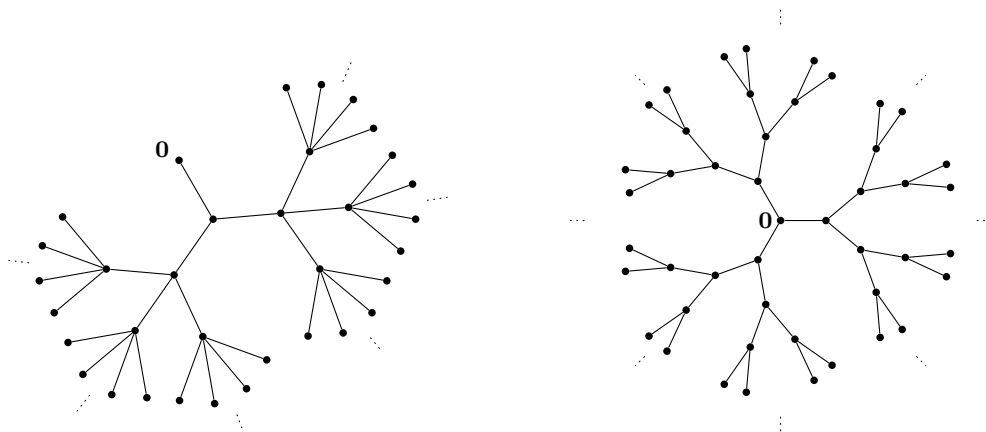
**Definición 4.** Decimos que un árbol  $\mathbb{T}$  es esféricamente simétrico con función de crecimiento  $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  si  $\text{grado}(\mathbf{0}) = f(0)$  y  $\text{grado}(v) = f(\text{dist}(\mathbf{0}, v)) + 1$ , para todo  $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

En otras palabras, un árbol es esféricamente simétrico si cada vértice  $v$  tiene  $f(|v|)$  hijos. Es decir, el grado de cada vértice depende del nivel al que pertenece.

**Ejemplo 1.** El árbol factorial  $\mathbb{T}_1$  es un árbol esféricamente simétrico con función de crecimiento dada por  $f(i) = i + 1$ ,  $i \geq 0$ , ver Figura 9(a). En este caso,

$$\mathbb{P}(\Lambda_n) = \mathbb{P}(N_n \geq 1) \leq \frac{|\partial\mathbb{T}_{1,n}|}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Luego, haciendo  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que  $\theta(\mathbb{T}_1) = 0$ .



(a) Árbol factorial  $\mathbb{T}_1$ . Su función de crecimiento es dada por  $f(\mathbf{0}) = 1$  y  $f(i) = i + 1$ ,  $i \geq 1$ . El nombre se debe a que en este caso  $|\partial\mathbb{T}_{1,n}| = n!$

(b) Árbol homogéneo  $d$ -dimensional  $\mathbb{T}_d$ . Su función de crecimiento es dada por  $f(\mathbf{0}) = d+1$  y  $f(i) = d$ ,  $i \geq 1$ . Ilustración para  $d = 2$ .

FIGURA 9. Ejemplos de árboles esféricamente simétricos.

El Ejemplo 1 sugiere que para tener percolación accesible, con probabilidad positiva, el árbol a ser considerado debe crecer más rápido que un árbol factorial. Con esta motivación, nos concentramos en una familia específica de árboles esféricamente simétricos. Recordemos que la función techo de  $x$ , denotada por  $\lceil x \rceil$ , es el menor número entero igual o mayor que  $x$ .

**Proposición 2.** Sea  $\mathbb{T}^\alpha$  el árbol esféricamente simétrico con función de crecimiento dada por  $f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil$ ,  $i \geq 0$ , donde  $\alpha > 0$  es una constante. Si  $\alpha \leq 1$ , entonces  $\theta(\mathbb{T}^\alpha) = 0$ .

*Demostración.* Como  $\alpha \leq 1$  entonces  $\mathbb{T}^\alpha \prec \mathbb{T}_1$  y por lo tanto  $\theta(\mathbb{T}^\alpha) \leq \theta(\mathbb{T}_1)$ . Vimos en el Ejemplo 1 que  $\theta(\mathbb{T}_1) = 0$ , entonces  $\theta(\mathbb{T}^\alpha) = 0$ .  $\square$

Consideramos la familia de árboles  $\mathbb{T}^\alpha$  con la intención de usar lo que sabemos del árbol factorial. Si bien, la misma comparación no vale para otras familias, una salida para tales casos es verificar directamente si  $|\partial\mathbb{T}_n|/(n+1)! \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  como en el Ejemplo 1. Esto permite probar que para ciertos árboles, con probabilidad 1, no hay percolación accesible.

**Ejemplo 2.** El árbol homogéneo  $d$ -dimensional  $\mathbb{T}_d$ , con  $d \geq 2$ , es el árbol esféricamente simétrico cuya función de crecimiento es dada por  $f(\mathbf{0}) = d + 1$  y  $f(i) = d$  para  $i \geq 1$ , ver

Figura 9(b). En otras palabras,  $\mathbb{T}_d$  es un árbol para el cual  $\text{grado}(v) = d + 1$  para todo  $v \in V$ . En este caso,

$$\mathbb{P}(\Lambda_{n-1}) \leq \frac{|\partial \mathbb{T}_{d,n-1}|}{n!} = \frac{(d+1)d^{n-2}}{n!} \sim \frac{(de)^n}{n^{n+1/2}},$$

donde la última aproximación es por la fórmula de Stirling. Luego, haciendo  $n \rightarrow \infty$ , concluimos que  $\theta(\mathbb{T}_d) = 0$ .

Para una prueba de que percolación accesible existe con probabilidad positiva, los argumentos requieren más trabajo y están basados en comparaciones con procesos de ramificación. Para simplificar la exposición nos remitimos apenas a enunciar un resultado que nos permitirá concluir la existencia de transición de fase para la familia de árboles  $\mathbb{T}^\alpha$ .

**Teorema de Bertacchi, Rodriguez y Zucca (2020).** Sea  $\mathbb{T}$  un árbol esféricamente simétrico com función de crecimiento  $f$ . Si

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{f(i)} < \infty \quad (25)$$

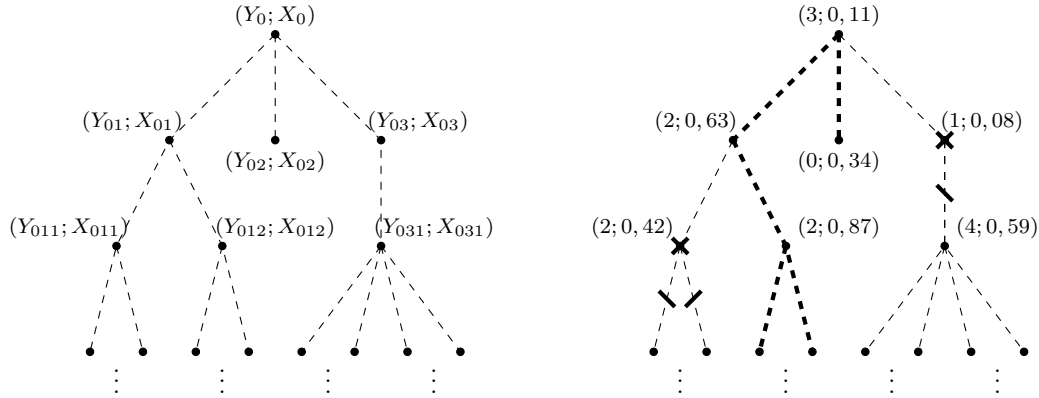
entonces  $\theta(\mathbb{T}) > 0$ .

*Demostración.* Omitida. Este teorema es consecuencia de los resultados obtenidos en [5, Corolario 3.4].  $\square$

El teorema anterior resulta como consecuencia del estudio realizado en [5] en el contexto de procesos de ramificación. En dicho trabajo los autores formalizan un proceso de ramificación con selección que puede ser interpretado como un modelo de percolación accesible en árboles aleatorios. Una descripción detallada de tales argumentos se escapa del propósito de estas notas. Sin embargo, hacemos una mención para los lectores o lectoras que tengan cierta familiaridad con los procesos de ramificación. Sugerimos [18, 25] para más detalles sobre estos procesos. El modelo propuesto en [5] es un proceso de ramificación en medio variable donde la novedad es un sistema de selección. Para cada nueva partícula del proceso se asocia una constante proveniente de una familia de variables aleatorias i.i.d. con distribución uniforme en  $(0, 1)$ . En caso de que la constante asociada a una partícula sea menor que la constante asociada a la partícula que le dio origen, entonces la primera no sobrevive, ver Figura 10. En [5] se encuentran condiciones para garantizar la sobrevivencia o extinción de este proceso. Una de las condiciones para sobrevivencia es que la sucesión de distribuciones de descendencias sea tal que sus respectivas esperanzas  $m_n$  cumplan con la condición:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{m_i} < \infty,$$

junto con que, para alguna constante  $C > 0$  exista  $g : \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$  tal que si  $m_n^{(2)}$  es el segundo momento de la distribución asociada a la  $n$ -ésima generación, entonces  $(m_n^{(2)}/m_n^2) \leq g(n)$ , para  $n$  suficientemente grande y  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (g(n+1)/g(n)) < C$ , ver [5, Corolario 3.4]. Ahora, si suponemos que cada partícula de la  $n$ -ésima generación tendrá un número constante  $f(n)$  de hijos en la generación siguiente, antes de la selección, entonces las condiciones técnicas mencionadas se reducen a la ecuación (25). Notemos que en este caso la progenie de la partícula inicial se puede identificar con el conjunto de vértices de un árbol esféricamente simétrico, con función de crecimiento  $f$ , que están conectados a la raíz por un camino accesible. Luego



(a) Cada partícula origina  $Y_v$  partículas en la generación siguiente de acuerdo a variables aleatorias independientes cuya distribución puede variar de generación en generación. Adicionalmente, a cada partícula se asocia un valor  $X_v$  de una familia de variables aleatorias i.i.d. con distribución uniforme en  $(0, 1)$ .

(b) Para cualquier realización del proceso se asume que si una partícula tiene un valor de  $X_v$  menor que el valor asociado de la partícula que le dio origen, entonces la primera no sobrevive y es retirada del sistema. En líneas gruesas se destaca la progenie de la partícula inicial.

FIGURA 10. Ilustración del proceso de ramificación con selección de [5].

sobrevivencia del proceso de ramificación con selección implica percolación accesible en el árbol asociado.

Volviendo a la familia de árboles  $\mathbb{T}^\alpha$ , notemos que como consecuencia del teorema de Bertacchi et al. podemos concluir la existencia de transición de fase en  $\alpha$ .

**Corolario 1.** Sea  $\mathbb{T}^\alpha$  el árbol esféricamente simétrico con función de crecimiento dada por  $f(i) = \lceil (i+1)^\alpha \rceil$ ,  $i \geq 0$ , donde  $\alpha > 0$  es una constante. Si  $\alpha > 1$ , entonces  $\theta(\mathbb{T}^\alpha) > 0$ .

**Observación 5.** Podemos resumir los resultados anteriores de la siguiente forma: si consideramos el modelo de percolación accesible en el árbol  $\mathbb{T}^\alpha$ , con  $\alpha > 0$ , entonces existe un valor crítico del parámetro  $\alpha$ ,  $\alpha_c = 1$ , tal que

$$\theta(\mathbb{T}^\alpha) \begin{cases} = 0, & \text{si } \alpha \leq \alpha_c, \\ > 0, & \text{si } \alpha > \alpha_c. \end{cases}$$

**Un poco más sobre el modelo.** El modelo de percolación accesible fue propuesto recientemente en [31], donde los autores también lo estudiaron para el caso en que las variables asociadas no son necesariamente igualmente distribuidas. Una serie de contribuciones fue publicada desde entonces y el mejor punto de partida para una revisión de resultados es el resumen elaborado por Krug en [23]. Con respecto a árboles infinitos los únicos trabajos realizados, hasta donde el autor de estas notas sabe, son los artículos [5, 8]. De hecho, la última sección reunió una buena parte de la discusión propuesta en [8]. Uno de los problemas que permanece en abierto es identificar una condición necesaria y suficiente en la función de crecimiento de un árbol esféricamente simétrico para garantizar la existencia de percolación accesible con probabilidad positiva. Debido a los ejemplos estudiados y resultados obtenidos, una sospecha de este autor es que (25) sea tal condición.

## AGRADECIMIENTOS

Estas notas complementan el material del curso Modelos Probabilísticos dictado en la Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, durante el XV Congreso Dr. Antonio Monteiro del 5 al 7 de Junio de 2019. Agradezco a los Comités Organizador y Científico que con su dedicación y esfuerzo hicieron posible el congreso. De modo especial quiero agradecer a Beatriz Marrón por la calurosa recepción y atención brindada durante mi visita a la UNS y a Marita Martín por su disposición e incentivo post-evento para que la publicación de estas notas sea posible. Finalmente expreso mi agradecimiento a Alejandra Rada, Cristian Coletti y Mary Torriani por su revisión cuidadosa de la primera versión de este trabajo y por todas las sugerencias que contribuyeron para mejorarla.

## REFERENCIAS

- [1] O.S.M. Alves, E. Lebensztayn, F.P. Machado, and M.Z. Martinez, *Random walks systems on complete graphs*, Bull. Braz. Math. Soc. **37** n.4 (2006), 571–580.
- [2] O. Alves, F. Machado, and S. Popov, *Phase transition for the frog model*, Electron. J. Probab. **7** n.21 (2002), 16–21.
- [3] O.S.M. Alves, F.P. Machado, and S. Popov, *The shape theorem for the frog model*, Ann. Appl. Probab. **12** n.2 (2002), 533–546.
- [4] I. Benjamini, L.R. Fontes, J. Hermon, and F.P. Machado, *On an epidemic model on finite graphs*, Ann. Appl. Probab. **30** n.1 (2020), 208–258.
- [5] D. Bertacchi, P.M. Rodriguez, and F. Zucca, *Galton-Watson processes in varying environment and accessibility percolation*, Braz. J. Probab. Stat. **34** n.3 (2020), 613–628.
- [6] P. Brémaud, *Markov Chains. Gibbs Fields, Monte Carlos Simulation, and Queues*, Springer, New York, 1999.
- [7] S.R. Broadbent, and J.M. Hammersley, *Percolation processes I. Crystals and mazes*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **53** (1957), 629–641.
- [8] C.F. Coletti, R.J. Gava, and P.M. Rodriguez, *On the existence of accessibility in a tree-indexed percolation model*, Phys. A **492** (2018), 382–388.
- [9] C. Döbler, N. Gantert, T. Höfelsauer, S. Popov, and F. Weidner, *Recurrence and transience of frogs with drift on  $\mathbb{Z}^d$* , Electron. J. Probab. **23** n.88 (2018), 1–23.
- [10] A.W.F. Edwards, *Pascal’s Problem: The “Gambler’s Ruin”*, Int. Stat. Rev. **51** n.1 (1983), 73–79.
- [11] L.R.G Fontes, *Notas em percolação*, Instituto de Matemática e Estatística - USP (1996), available at <https://www.ime.usp.br/~lrenato>.
- [12] S. Gallo, and P.M. Rodriguez, *Frog models on trees through renewal theory*, J. Appl. Probab. **55** n.3 (2018), 887–899.
- [13] N. Gantert, and P. Schmidt, *Recurrence for the frog model with drift on  $\mathbb{Z}$* , Markov Process. Related Fields **15** n.1 (2009), 51–58.
- [14] C.M. Grinstead, and L.J. Snell, *Introduction to Probability*, 2.ed., AMS, 1997.
- [15] G.R. Grimmett, *Percolation*, 2.ed., Springer, Berlín, 1999.
- [16] G. Grimmett, *Probability on Graphs. Random Processes on Graphs and Lattices*, Cambridge University Press, 2011.
- [17] A. Gut, *The gambler’s ruin problem with delays*, Statist. Probab. Lett. **83** (2013), 2549–2552.
- [18] T. Harris, *The Theory of Branching Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [19] C. Hoffman, T. Johnson, and M. Junge, *From transience to recurrence with Poisson tree frogs*, Ann. Appl. Probab. **26** n.3 (2016), 1620–1635.
- [20] B.R. James, *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*, 3.ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2013.
- [21] H. Kesten, *The critical probability of bond percolation on the square lattice equals 1/2*, Comm. Math. Phys. **74** (1980), 41–59.
- [22] H. Kesten, *What Is . . . Percolation?*, Notices Amer. Math. Soc. **53** n.5 (2006), 572–573.
- [23] J. Krug, *Accessibility percolation in random fitness landscapes*, preprint (2019), available at <https://arxiv.org/abs/1903.11913>.



- [24] T.G. Kurtz, E. Lebensztayn, A.R. Leichsenring, and F.P. Machado, *Limit theorems for an epidemic model on the complete graph*, ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **4** (2008), 45–55.
- [25] P. Jagers, *Branching processes with biological applications*, John Wiley and Sons, 1975.
- [26] E. Lebensztayn, F.P. Machado, and M.Z. Martinez, *Random walks systems with finite lifetime on  $\mathbb{Z}$* , J. Statist. Phys. **162** (2016), 727–738.
- [27] E. Lebensztayn, F.P. Machado, and S. Popov, *An improved upper bound for the critical probability of the frog model on homogeneous trees*, J. Statist. Phys. **119** (2005), 331–345.
- [28] E. Lebensztayn, F.P. Machado, and P.M. Rodríguez, *On the behaviour of a rumour process with random stiffling*, Environ. Modell. Softw. **26** (2011), 517–522.
- [29] E. Lebensztayn, and P.M. Rodriguez, *A connection between a system of random walks and rumor transmission*, Phys. A **392** n.23 (2013), 5793–5800.
- [30] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, and A.M. Fink, *Bernoulli's Inequality*. In: Classical and New Inequalities in Analysis. Mathematics and Its Applications (East European Series), vol 61. Springer, Dordrecht, 1993.
- [31] S. Nowak, and J. Krug, *Accessibility percolation on  $n$ -trees*, Europhys. Lett. **101** (2013), 66004.
- [32] M.I. Roberts, and L.Z. Zhao, *Increasing paths in regular trees*, Electron. Commun. Probab. **18** n.87 (2013), 1–10.
- [33] S. Ross, *A Simple Solution to a Multiple Player Gambler's Ruin Problem*, Am. Math. Mon. **116** n.1 (2009), 77–81.
- [34] R.B. Schinazi, *Classical and Spatial Stochastic Processes*, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [35] R.J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, 4th.ed., Prentice Hall, 1996.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA, AV. PROF. MORAES REGO, 1235. CIDADE UNIVERSITÁRIA, CEP 50670-901, RECIFE, PE, BRAZIL.

*E-mail address:* pablo@de.ufpe.br