Aula 4: Problemas e aplicações

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Exercícios
- O problema da ruína do jogador como um passeio aleatório

Exercício 1

Mostre que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

Solução: Sabemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

ou, reescrevendo,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

Como $P(A \cup B) \leq 1$ temos que

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

Exercício 2

Mostre que se $A_i \bigcap A_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$ e $P(B|A_n) \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$P\left(B \middle| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq c.$$

Solução:

$$P\left(B \middle| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(B \cap \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{B \cap A_n\}\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)},$$

mas
$$\frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{B \cap A_n\}\right)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B \cap A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}.$$

Exercício 2

... continuação: O fato de $P(B|A_n) \geq c$ garante que

$$P\left(B|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} \geq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c\,P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = c.$$

Exercício 3

1. Mostre que $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c)$.

Solução: De fato, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)$ e como

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c),$$

concluímos o resultado.

Exercício 3

2. Mostre que, se $P(A_k) \geq 1 - \epsilon$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ então

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - n\epsilon.$$

Solução: É suficiente observar que $P(A_k^c) \leq \epsilon$ e aplicar o item anterior:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k^c) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \epsilon = 1 - n\epsilon.$$

Exercício 4

Se $A_n \searrow$ e $P(A_{n+1}|A_n) \leq 1/2$ prove que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Solução: Note que

$$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{P(A_{n+1} \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)},$$

então $P(A_{n+1}|A_n) \leq 1/2$ implica que

$$\frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} \leq \frac{1}{2},$$

ou $P(A_{n+1}) \leq (1/2)P(A_n)$, que vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas

$$0 \leq P(A_{n+1}) \leq \frac{1}{2}P(A_n) \leq \frac{1}{2^2}P(A_{n-1}) \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}P(A_1) \leq \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Então, } 0 \leq \lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} (1/2^{n-1}) = 0.$$

Exercício 5

Se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $P(B|A_n) = P(C|A_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que:

$$P\left(B \middle| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(C \middle| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Solução: Note que

$$P\left(B \middle| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P\left(C \middle| A_n\right) P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)},$$

mas

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} P\left(C \middle| A_n\right) P(A_n)}{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = P\left(C \middle| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$