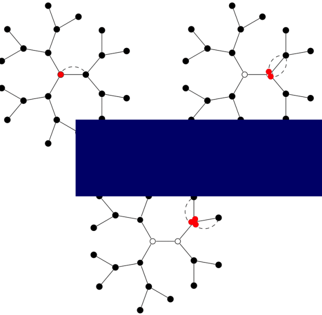
PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



PROCESSOS DE POISSON: MOTIVAÇÃO

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Distribuição de Poisson
- Distribuição exponencial
- Processo de Poisson

Distribuição de Poisson

X tem *distribuição de Poisson* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots\}.$$

Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$.

Observação!

X pode ser interpretada como uma aproximação para o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados, assumindo valores grandes de n e pequenos de p.

Aproximação da Binomial para a Poisson

Seja $X \sim B(n,p)$, n grande, e seja $Y \sim Poisson(\lambda)$ com $\lambda = np$.

$$P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

que podemos reescrever:

$$P(X=i) = \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\{i-1\})}{n^i} \right\} \left(\frac{\lambda^i}{i!}\right) \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i}.$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CCEN
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

Aproximação da Binomial para a Poisson

Como

$$1 - \frac{j}{n} \approx 1, \ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1,$$

concluimos que

$$P(X = i) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = P(Y = i).$$

Soma

Se $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$ e são independentes então:

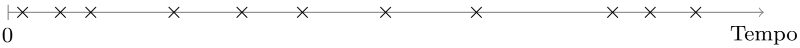
$$X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu).$$

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{i=0}^{n} P(\{X+Y=n\} \cap \{Y=i\}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P(\{X=n-i\} \cap \{Y=i\}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P(X=n-i)P(Y=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left\{ \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-i}}{(n-i)!} \right\} \left\{ \frac{e^{-\mu}\mu^{i}}{i!} \right\} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^{n-i} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Processo de Poisson de parâmetro λ

Usado para representar, principalmente, os instantes de ocorrência de eventos de interesse (terremotos em uma região, ligações telefônicas recebidas por uma central, chegadas de clientes em um sistema etc).

Um Processo de Poisson de parâmetro λ unidimensional pode ser representado como uma sequência de pontos ou marcas em $\mathbb{R}^+$:



tais que, se $N(B)$ = número de pontos contidos no intervalo $B \subset \mathbb{R}^+$, então:

- $N(B) \sim Poisson(\lambda|B|)$;
- $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^+$ intervalos, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, então $N(B_1)$ e $N(B_2)$ são independentes.

Observação!

Podemos estender o anterior para qualquer $B \in \mathcal{B}$, com $|B|$ representando a medida de Lebesgue de B.

Exemplo 1

Suponha que as ocorrências de um evento de interesse acontecem segundo um $P.P.(10)$. Se $N(s,t)$ denota o número de ocorrências entre os instantes s e t, determine $P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)$.

Solução. *Note que*

$$P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)=\frac{P(\{N(0,1)=2\}\cap\{N(0,5)=5\})}{P(N(0,5)=5)},$$

e $N(0,5)\sim Poisson(50)$*:* $P(N(0,5)=5)=e^{-50}\dfrac{50^5}{5!}$. *Por outro lado,*

$$\{N(0,1)=2\}\cap\{N(0,5)=5\}=\{N(0,1)=2\}\cap\{N(1,5)=3\}.$$

Então

$$P(\{N(0,1)=2\}\cap\{N(0,5)=5\})=P(\{N(0,1)=2\})P(\{N(1,5)=3\}).$$

... continuação do Exemplo 1. Finalmente,

$$P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)=\frac{\left\{e^{-10}\dfrac{10^2}{2!}\right\}\left\{e^{-40}\dfrac{40^3}{3!}\right\}}{e^{-50}\dfrac{50^5}{5!}},$$

que reescrevendo é:

$$P(N(0,1)=2|N(0,5)=5)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3.$$

Observação!

Para um P.P.(λ): dado que $N(0,t)=n$, as posições dos n pontos estão distribuídas em $(0,t)$ como n variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $U(0,t)$.

Distribuição Exponencial

X tem *distribuição exponencial* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim Exp(\lambda)$.

Observação!

Usualmente usada para descrever o tempo até a ocorrência de um evento de interesse.

Se $X \sim Exp(\lambda)$ então $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Perda de memória

Proposição 1

Se $X \sim Exp(\lambda)$ *então*

$$P(X > t+s|X > s) = P(X > t), \quad para\ s, t \in (0, \infty).$$

Prova. Note que

$$P(X > t+s|X > s) = \frac{P(\{X > t+s\} \cap \{X > s\})}{P(X > s)}$$

mas $\{X > t+s\} \subset \{X > s\}$, então

$$P(X > t+s|X > s) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t).$$

Mínimo de exponenciais independentes

Se temos n variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ então o mínimo ou máximo delas também é variável aleatória. De fato:

$$\{\min\{X_1, \ldots, X_n\} > a\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > a\} \in \mathcal{F}.$$

Proposição 2

Se $X_1, \ldots, X_n$ são independentes com $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, então

$$\min\{X_1, \ldots, X_n\} \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Prova. Note que

$$P\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > a\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > a) = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) a}.$$

Exemplo 2

Ocorrências de um evento de acordo com um P.P.(λ). *Se* T_1 *é o instante da primeira ocorrência então* $T_1 \sim Exp(\lambda)$. *De fato, se*

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t),$$

como

$$\{T_1 > t\} = \{N(0,t) = 0\},$$

e $N(0,t) \sim Poisson(\lambda t)$, *então*

$$F_{T_1}(t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - P(N(0,t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Observação!

Para um P.P.(λ): *se* $T_1, T_2, \ldots$ *são as distâncias entre um ponto e o seguinte ponto do processo então estas são i.i.d. com distribuição* $T_1 \sim Exp(\lambda)$.

Distribuição gama

X tem *distribuição gama* com parâmetros $\alpha \in (0,\infty)$ e $\lambda \in (0,\infty)$ se:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

em que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1}\, dy$ (função gama).

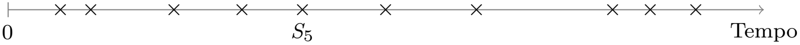
Notação: $X \sim Gama(\alpha, \lambda)$.

Observação!

$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$. *Em particular,* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *se* $n \in \mathbb{N}$.

Processo de Poisson

Considere um $P.P.(\lambda)$ e seja S_n o instante da n-ésima ocorrência(ou a distância entre o 0 e o n-ésimo ponto). Então $S_n \sim Gama(n, \lambda)$.



De fato, como $\{S_n \leq t\} = \{N(0,t) \geq n\}$, então

$$P(S_n \leq t) = P(N(0,t) \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(N(0,t) = i) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}.$$

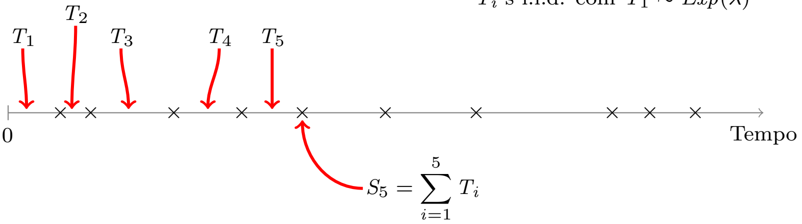
Logo,

$$f_{S_n}(t) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Processo de Poisson

Lembre que:

T_i's i.i.d. com $T_1 \sim Exp(\lambda)$

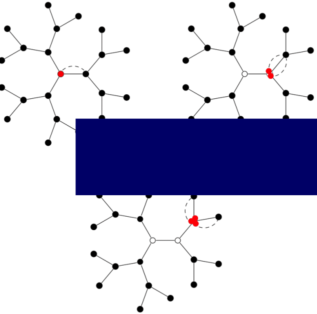


Observação!

Se $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *são i.i.d. com* $T_1 \sim Exp(\lambda)$ *então* $\sum_{i=1}^{n} T_i \sim Gama(n, \lambda)$.

Referências

Sheldon M. Ross. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010. (capítulo 5)



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez

`https://www.pablo-rodriguez.org`

e-mail: pablo@de.ufpe.br