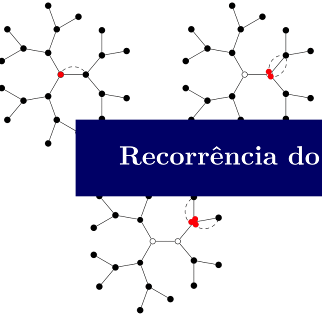
ET658 - Processos Estocásticos para Atuária

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



Recorrência do passeio aleatório. Análise do primeiro passo.

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et658-processos-estocasticos

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 7

- Recorrência do passeio aleatório.
- Análise do primeiro passo.

Lembrete: Recorrência e transiência

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados $\mathcal{S}$. Para $i \in \mathcal{S}$ seja

$$\tau_i := \inf\{n \geq 1 : X_n = i\},$$

com $\tau_i := \infty$ se o infimo não existe. Em palavras,

$$\tau_i := \text{ primeiro instante de tempo em que a cadeia visita o estado } i,$$

com $\tau_i := \infty$ no caso em que a cadeia não visita i após $n = 0$. Se

$$P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$$

dizemos que i é um estado recorrente. Se i não é recorrente dizemos que é transiente; isto é, se

$$P(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$$

dizemos que i é transiente.

Recorrência e transiência

Em outras palavras, um estado i é

- recorrente: se
$$P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1,$$
ou seja, se dado que a cadeia sai do estado i, então ela sempre retorna ao estado i em um tempo finito.

- transiente: se
$$P(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0,$$
ou seja, se dado que a cadeia sai do estado i, então existe uma chance desta nunca retornar ao estado i.

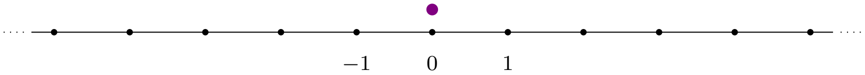
Critério para recorrência ou transiência

Teorema 7.1

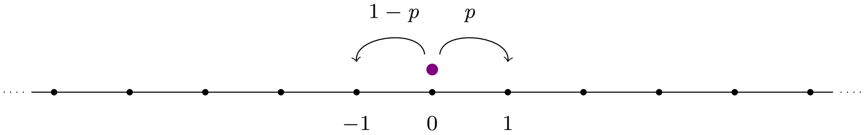
Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$ *e probabilidades de transição* $p(i,j)$ *para* $i, j \in \mathcal{S}$. *Então*

$$i \in \mathcal{S} \text{ é recorrente se, e somente se, } \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i) = \infty.$$

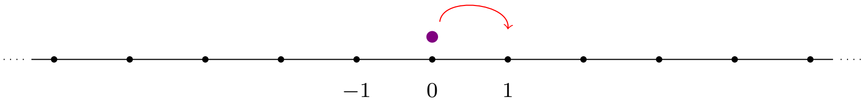
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



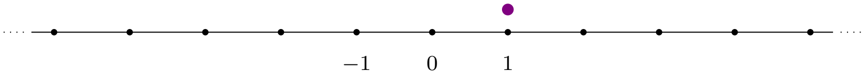
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



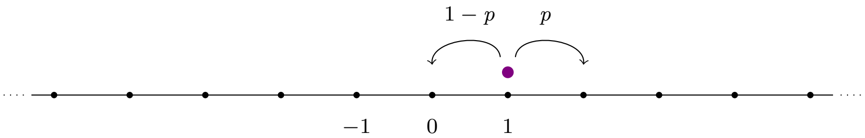
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



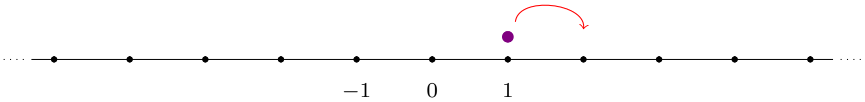
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



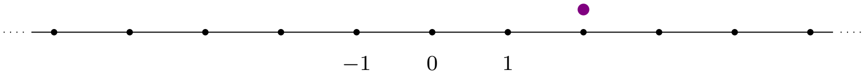
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



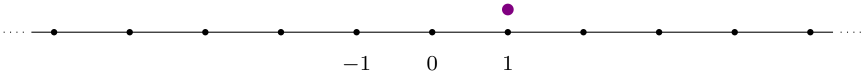
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



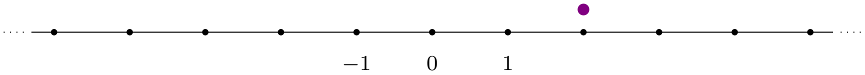
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

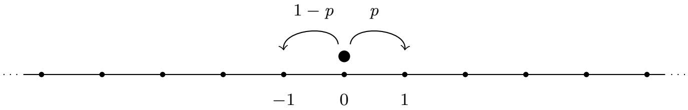


Pergunta: existe uma chance de não retornar ao ponto de partida?

O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ é a cadeia de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\mathbb{Z}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i) = \begin{cases} p, & \text{para } j = i+1, \\ 1-p, & \text{para } j = i-1, \\ 0, & \text{para } j \neq i \pm 1. \end{cases}$$



Teorema 7.2

O Passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ é recorrente se, e somente se, $p = 1/2$.

Prova. Vamos analisar $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i)$. Note que $p_{2n-1}(0,0) = 0$ para $n \geq 1$ enquanto que

$$p_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

De fato, dado $X_0 = 0$, para $X_{2n} = 0$, uma configuração favorável é:

$$\sigma : \underset{1}{\overleftarrow{\quad}} \; \underset{2}{\overrightarrow{\quad}} \; \underset{3}{\overleftarrow{\quad}} \; \overrightarrow{\quad} \; \overleftarrow{\quad} \; \cdots\cdots \; \overrightarrow{\quad} \; \overleftarrow{\quad} \; \underset{2n-1}{\overrightarrow{\quad}} \; \underset{2n}{\overleftarrow{\quad}}$$

n à esquerda $(\leftarrow)$
n à direita $(\rightarrow)$

Mas há $\binom{2n}{n}$ formas diferentes de obter uma configuração destas e

$$P(\sigma) = p^n(1-p)^n,$$ por independência!

Denotamos $q := 1 - p$. Então

$$p_{2n}(0,0) = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right\} (p\,q)^n$$

e usamos a fórmula de Stirling:

$$n! \sim n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

representando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n\, e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

para obter

$$p_{2n}(0,0) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Mas

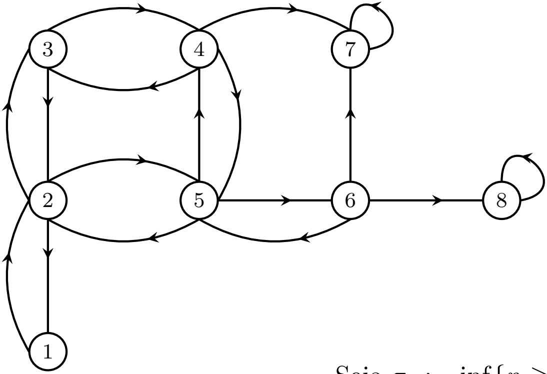
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \infty \text{ se, e somente se, } p = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 7.1

Considere a CMTD $(X_n)_{n\geq 0}$ *com* $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, 8\}$ *e matriz de transição*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto é, considere $(X_n)_{n\geq 0}$ tal que:

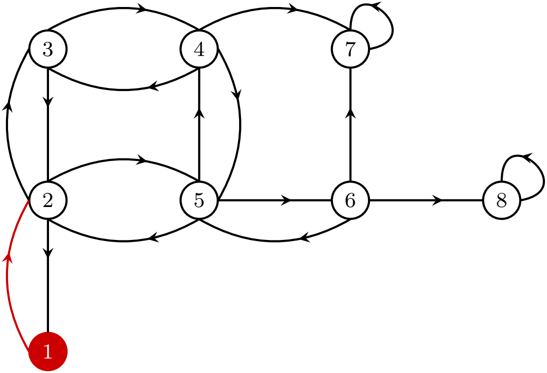


Seja $\tau_k := \inf\{n \geq 0 : X_n = k\}$.

Vamos calcular $P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 2)$.

(probabilidade de atingir o estado 8 antes que o 7 dado que $X_0 = 2$)

Seja $p_i := P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:

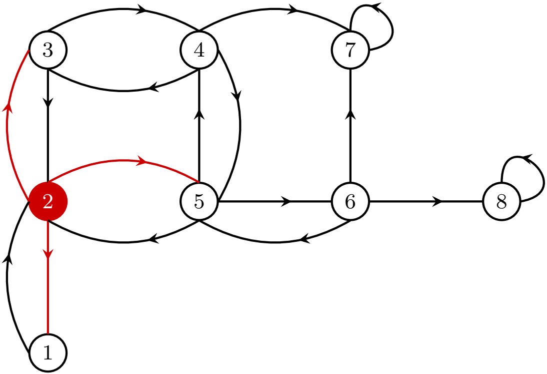


$$p_1 = p_2$$

De fato,

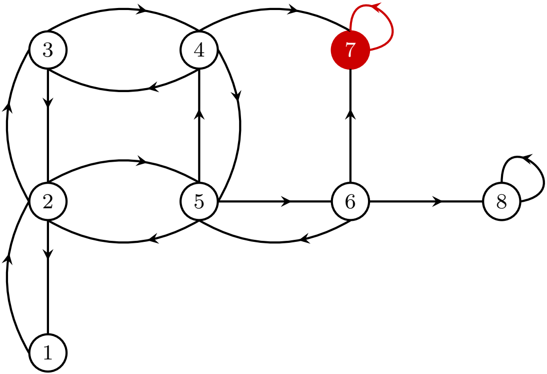
$$
\begin{aligned}
p_1 &= P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 1) \\
&= \sum_{i=1}^{8} P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 1, X_1 = i) P(X_1 = i | X_0 = 1) \\
&= P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 1, X_1 = 2) P(X_1 = 2 | X_0 = 1) \\
&= P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 1, X_1 = 2) \\
&= P(\tau_8 < \tau_7 | X_1 = 2) \qquad \text{(propriedade Markoviana)} \\
&= P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 2) \qquad \text{(a CMTD é homogênea)} \\
&= p_2
\end{aligned}
$$

Seja $p_i := P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



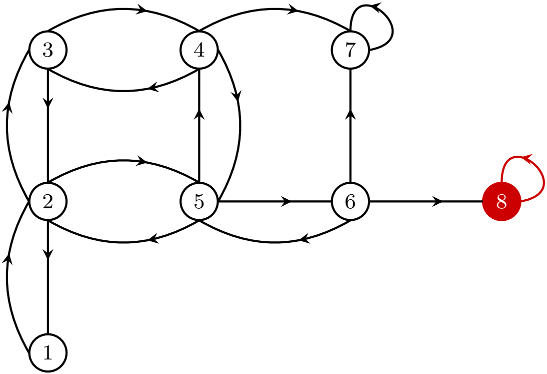
$$p_2 = (1/3)\, p_1 + (1/3)\, p_3 + (1/3)\, p_5$$

Seja $p_i := P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



$$p_7 = P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 7) = 0$$

Seja $p_i := P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



$$p_8 = P(\tau_8 < \tau_7 | X_0 = 8) = 1$$

Desta forma, como $p_7 = 0$ e $p_8 = 1$, conseguimos:

$$\begin{cases} p_1 &= p_2, \\ p_2 &= (1/3)\,p_1 + (1/3)\,p_3 + (1/3)\,p_5, \\ p_3 &= (1/2)\,p_2 + (1/2)\,p_4, \\ p_4 &= (1/3)\,p_3 + (1/3)\,p_5, \\ p_5 &= (1/3)\,p_2 + (1/3)\,p_4 + (1/3)\,p_6, \\ p_6 &= (1/3)\,p_5 + (1/3). \end{cases}$$

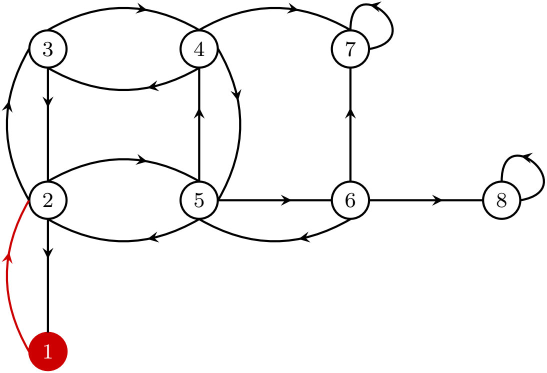
Assim, $p_1 = p_2 = 3/13$, $p_3 = 5/26$, $p_4 = 2/13$, $p_5 = 7/26$ e $p_6 = 11/26$.

... continuação do Exemplo 1. Agora, se:

$$T := \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{7, 8\}\},$$

então podemos calcular: $E(T|X_0 = 2)$. É o número médio de passos que o processo dará até atingir o estado 8 ou o estado 7, dado que $X_0 = 0$.

Seja $m_i := E(T|X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:

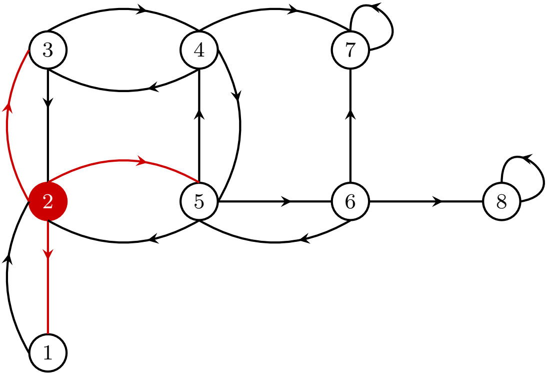


$$m_1 = 1 + m_2$$

De fato,

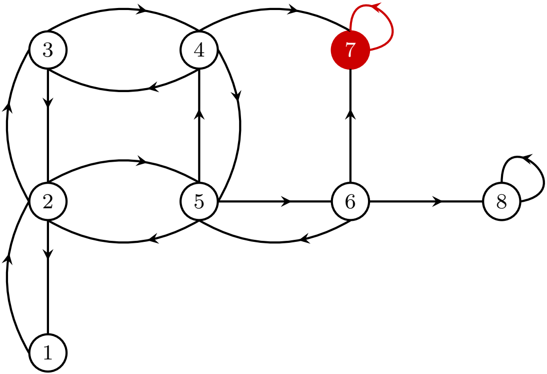
$$
\begin{aligned}
m_1 &= E(T|X_0 = 1) \\
&= \sum_{i=1}^{8} E(T|X_0 = 1, X_1 = i)P(X_1 = i|X_0 = 1) \\
&= E(T|X_0 = 1, X_1 = 2)P(X_1 = 2|X_0 = 1) \\
&= 1 + E(T|X_0 = 2) \\
&= 1 + m_2
\end{aligned}
$$

Seja $m_i := E(T|X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



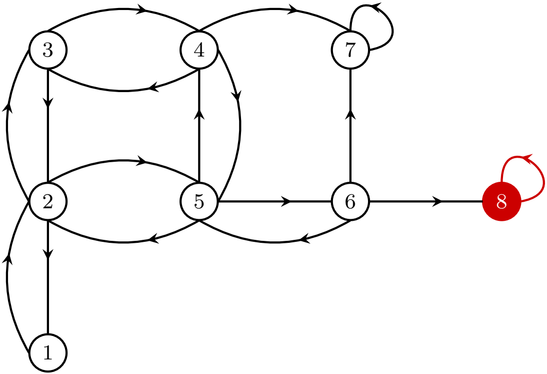
$$m_2 = (1/3)\,(1 + m_1) + (1/3)\,(1 + m_3) + (1/3)\,(1 + m_5)$$

Seja $m_i := E(T|X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



$$m_7 = E(T|X_0 = 7) = 0$$

Seja $m_i := E(T|X_0 = i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ e note que:



$$m_8 = E(T|X_0 = 8) = 0$$

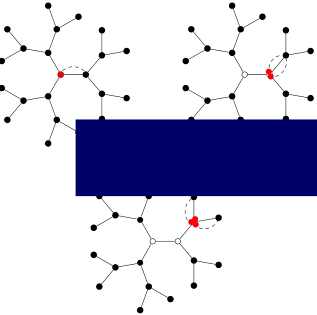
Desta forma, como $m_7 = m_8 = 0$, conseguimos:

$$\begin{cases} m_1 &= 1 + m_2, \\ m_2 &= 1 + (1/3)(m_1 + m_3 + m_5), \\ m_3 &= 1 + (1/2)\,(m_2 + m_4), \\ m_4 &= 1 + (1/3)\,(m_3 + m_5), \\ m_5 &= 1 + (1/3)\,(m_2 + m_4 + m_6), \\ m_6 &= (1/3)\,m_5. \end{cases}$$

Assim $m_1 = 145/13$, $m_2 = 132/13$, $m_3 = 123/13$, $m_4 = 88/13$, $m_5 = 102/13$ e $m_6 = 47/13$.

Referência!

Ross, S. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010.



Bom estudo!