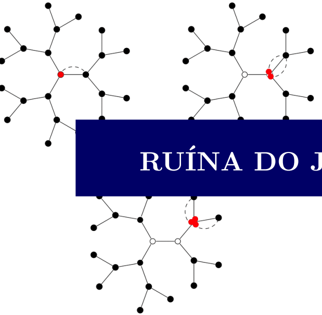
PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



RUÍNA DO JOGADOR E PASSEIOS ALEATÓRIOS EM $\mathbb{Z}$

Prof. Pablo M. Rodriguez

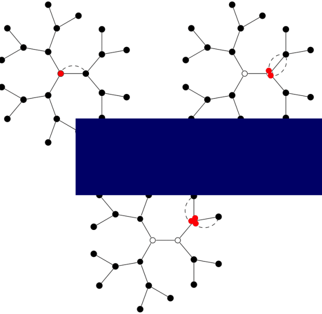
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Problema da ruína do jogador
- Passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$ e em $\mathbb{Z}$
- Modelo dos sapos em $\mathbb{Z}$



A ruína do jogador

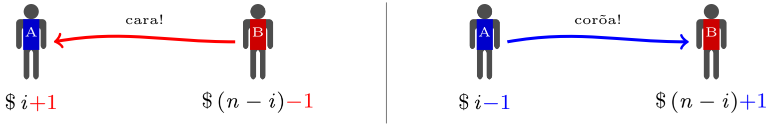
Problema

Dois jogadores, A e B, realizan apostas aos resultados de sucessivos lançamentos de uma moeda que, em cada lançamento, tem probab. $p \in (0,1)$ de dar cara, independentemente dos outros lançamentos.

$\$\, i$ $\qquad\qquad$ $\$\,(n-i)$

Problema

Dois jogadores, A e B, realizan apostas aos resultados de sucessivos lançamentos de uma moeda que, em cada lançamento, tem probab. $p \in (0,1)$ de dar cara, independentemente dos outros lançamentos.



Qual é a probabilidade de que A ganhe o jogo?

Nota!

Proposto por Pascal a Fermat em 1656. *Esta versão foi proposta por Huygens em* 1657. *Para uma revisão da história do problema e das soluções de Pascal, Fermat e Huygens, ver o artigo de Edwards, Pascal's Problem: The "Gambler's Ruin", Int. Stat. Rev.* **51** *n.1 (1983), 73-79.*

A solução

Se $A_i := \{A \text{ ganha o jogo}\}$, então queremos calcular $p_i := \mathbb{P}(A_i)$.

$$\text{Seja} \quad C := \{\text{o primeiro lançamento resulta em cara}\}$$

e note que pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$p_i = \mathbb{P}(A_i|C)\,\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A_i|C^c)\,\mathbb{P}(C^c),$$

o que implica que

$$p_i = p\,p_{i+1} + (1-p)\,p_{i-1}. \tag{1}$$

Observação

A equação (1) vale para $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Por outro lado, $p_0 = 0$ y $p_n = 1$.

A solução

Denotamos $q := 1 - p$. Então (1) pode ser escrita como

$$p_{i+1} - p_i = \left(\frac{q}{p}\right)(p_i - p_{i-1}), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}. \tag{2}$$

Aplicando sucessivamente (2) e usando que $p_0 = 0$ temos que

$$p_i - p_{i-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1, \tag{3}$$

para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Escrito de outra forma:

$$p_i = p_{i-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1.$$

A solução

Esta última expressão nos permite encontrar

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1 \\ &= p_{i-2} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-2} p_1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1 \\ &\vdots \\ &= \left(1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right) p_1. \end{aligned}$$

A solução

Logo, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

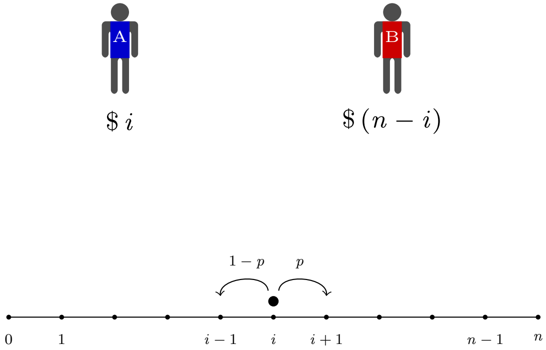
$$p_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)}\, p_1, & \text{si } q \neq p, \\[2ex] i\, p_1, & \text{si } q = p. \end{cases}$$

Como $p_n = 1$ podemos obter da expressão anterior, para $i = n$, o valor de p_1 em função de p e de q, e portanto, concluir que:

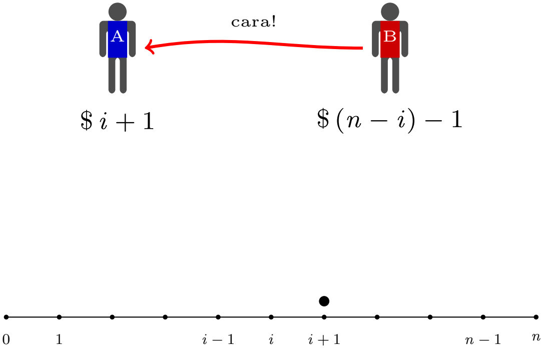
$$p_i = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^n}, & \text{si } q \neq p, \\[2ex] i/n, & \text{si } q = p, \end{cases}$$

para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

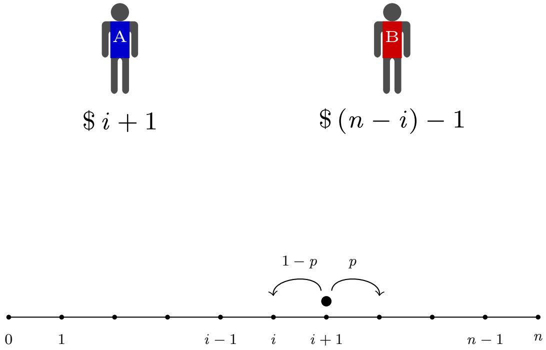
A ruína do jogador como um passeio aleatório



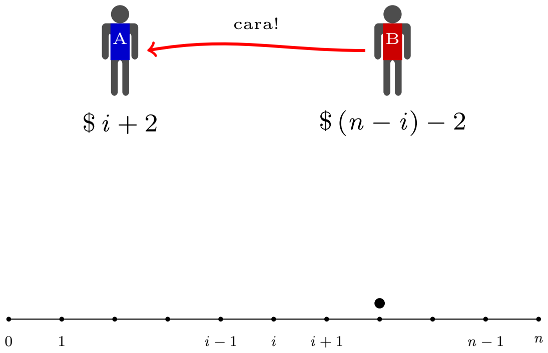
A ruína do jogador como um passeio aleatório



A ruína do jogador como um passeio aleatório



A ruína do jogador como um passeio aleatório



No contexto do passeio aleatório em $[\![0, n]\!]$

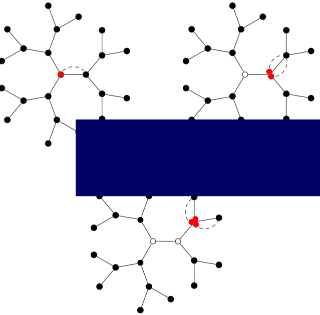
Dado que a partícula começa em i:

$$A_i = \{\text{a partícula atinge } n \text{ antes que } 0\}.$$

Lembremos que, se $q = 1 - p$, então:

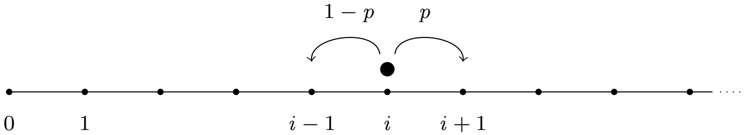
$$\mathbb{P}(A_i) = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^n}, & \text{si } q \neq p, \\ i/n, & \text{si } q = p, \end{cases}$$

para $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

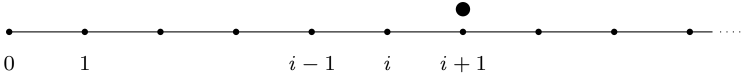


Passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$

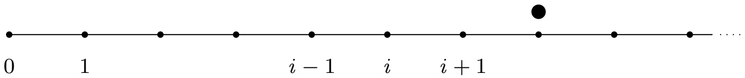
Motivação



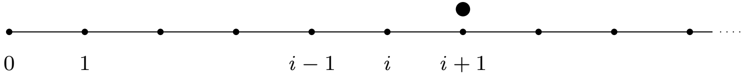
Motivação



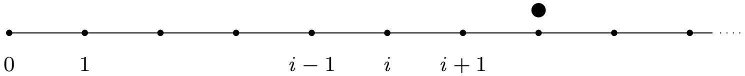
Motivação



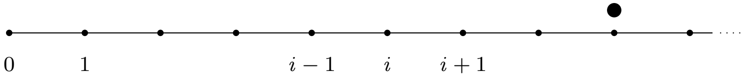
Motivação



Motivação



Motivação



Existe alguma chance de que a partícula nunca retorne ao seu ponto inicial?

O passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$

Consideramos a sequência i.i.d. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ tal que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1).$$

Se Y_0 denota a posição inicial da partícula então

$$Y_n = Y_{n-1} + \tilde{X}_n, \quad \text{para todo } n \in \{1, 2, \ldots\},$$

é a posição da partícula no n-ésimo instante de tempo, onde

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} X_n, & \text{si } Y_n \neq 0, \\ 1, & \text{si } Y_n = 0. \end{cases}$$

Chamamos passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$ à sequência $(Y_n)_{n \geq 0}$.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CCEN
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

Recorrência e transitividade

Definimos a variável aleatória

$$\tau_i^+ := \inf\{n \geq 1 : Y_n = i\},$$

com a convenção de que $\tau_i^+ = \infty$ se o infimo não é atingido.

Teorema 1

Seja $(Y_n)_{n\geq 0}$ o passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$. Então, para todo $i \geq 0$,

i. $\mathbb{P}\left(\tau_i^+ = \infty \middle| Y_0 = i\right) > 0$ *si* $p > 1/2$. *(transitividade);*

ii. $\mathbb{P}\left(\tau_i^+ < \infty \middle| Y_0 = i\right) = 1$ *si* $p \leq 1/2$. *(recorrência).*

Prova do Teorema 1. Condicionando sobre o primeiro salto da partícula, obtemos que

$$\mathbb{P}\left(\tau_i^+ = \infty \middle| Y_0 = i\right)$$

é igual a

$$p\,\mathbb{P}\left(\tau_i^+ = \infty \middle| Y_0 = i,\, Y_1 = i+1\right) + (1-p)\,\mathbb{P}\left(\tau_i^+ = \infty \middle| Y_0 = i,\, Y_1 = i-1\right).$$

Um bom exercício é verificar que $\mathbb{P}\left(\tau_i^+ = \infty \middle| Y_0 = i,\, Y_1 = i-1\right) = 0$. então $\mathbb{P}\left(\tau_i^+ = \infty \middle| Y_0 = i\right) > 0$ se, e somente se,

$$\mathbb{P}\left(\tau_i^+ = \infty \middle| Y_0 = i,\, Y_1 = i+1\right) > 0.$$

Então assumimos que a partícula começa em $i+1$ e, dada esta informação, definimos para cada $n \geq 2$ os eventos

$B(n) = \{$a partícula visita o vértice $n+i$ antes de visitar o vértice $i\}$.

Como $B(n) \searrow$, pois $B(n+1) \subset B(n)$ para todo $n \geq 2$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} B(n) = \bigcap_{n=2}^{\infty} B(n)$$

e a continuidade da probabilidade implica que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B(n)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{\infty} B(n)\right).$$

Agora, por um lado, comparando com a ruína do jogador temos

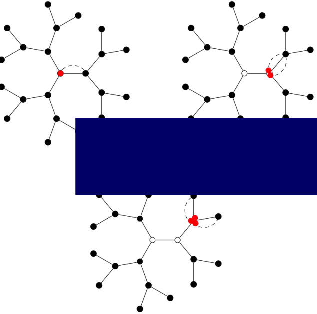
$$\mathbb{P}\left(B(n)\right) = \mathbb{P}\left(A(1)\right) = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)}{1-(q/p)^n}, & \text{si } q \neq p, \\ 1/n, & \text{si } q = p. \end{cases}$$

$$\text{Logo,} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B(n)) = \begin{cases} 1-(q/p), & \text{si } q < p, \\ 0, & \text{si } q \geq p. \end{cases}$$

Por otro lado, pela definição dos eventos $B(n)$, temos que

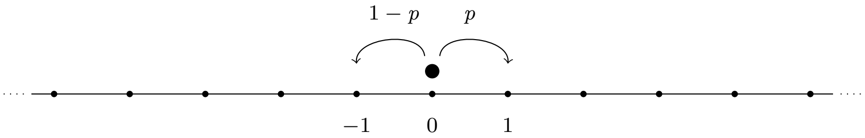
$$\mathbb{P}\left(\tau_i^+ = \infty \middle| Y_0 = i, Y_1 = i+1\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{\infty} B(n)\right).$$

Concluimos a prova do anterior notando que $q < p \iff p > 1/2$.



Passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

Motivação



Existe alguma chance de que a partícula nunca retorne ao seu ponto inicial?

O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

Consideramos a sequência i.i.d. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ tal que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1).$$

Se Y_0 denota a posição inicial da partícula então

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n, \quad \text{para todo } n \in \{1, 2, \ldots\},$$

é a posição da partícula no n-ésimo instante de tempo.

Chamamos passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ à sequência $(Y_n)_{n \geq 0}$.

Teorema 2

Seja $(Y_n)_{n\geq 0}$ *o passeio aleatório em* $\mathbb{Z}$*. Para todo* $i \in \mathbb{Z}$ *seja*

$$\tau_i := \inf\{n \geq 1 : Y_n = i\}.$$

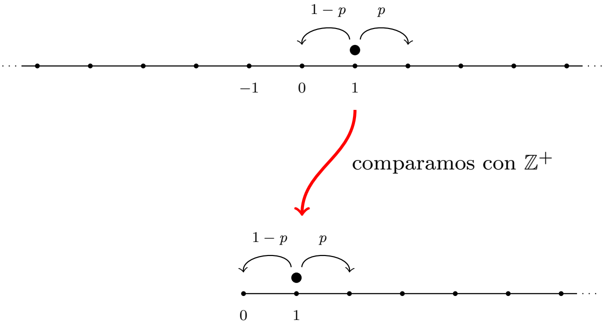
então, para todo $i \in \mathbb{Z}$*,*

$$\mathbb{P}\left(\tau_i = \infty \middle| Y_0 = i\right) > 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad p \neq 1/2.$$

Prova do Teorema 2. Consideramos $i = 0$. Notemos que

$$\mathbb{P}\left(\tau_0 = \infty \middle| Y_0 = 0\right) = p\,\mathbb{P}\left(\tau_0 = \infty \middle| Y_1 = 1\right) + (1-p)\,\mathbb{P}\left(\tau_0 = \infty \middle| Y_1 = -1\right).$$

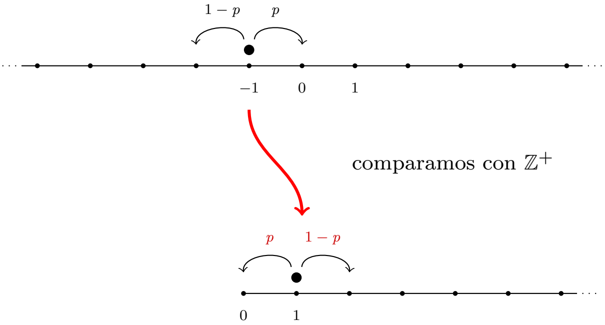
Agora observemos que, dado que $Y_1 = 1$:



a probabilidade de que ocorra $\{\tau_0 = \infty\}$ é a mesma que a de $\{\tau_0^+ = \infty\}$ dado que $Y_0^{(D)} = 1$, onde $(Y_n^{(D)})_{n\geq 0}$ é um passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$ definido como antes. Logo, o Teorema 1 implica que

$$\mathbb{P}\left(\tau_0 = \infty \middle| Y_1 = 1\right) > 0 \quad \text{se, e somente se } p > 1/2.$$

De forma análoga, dado que $Y_1 = -1$:



a probabilidade de $\{\tau_0 = \infty\}$ é a mesma que a de $\{\tau_0^+ = \infty\}$ dado que $Y_0^{(I)} = 1$, onde $(Y_n^{(I)})_{n\geq 0}$ é um passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$ pero com uma probabilidade de salto à direita de $1-p$. Logo, do Teorema 1

$$\mathbb{P}\left(\tau_0 = \infty \middle| Y_1 = -1\right) > 0 \quad \text{se, e somente se, } p < 1/2.$$

Do anterior podemos fazer duas conclusões; por um lado, concluímos que se

$$p > 1/2 \text{ ou } p < 1/2 \text{ isto é } p \neq 1/2,$$

então

$$\mathbb{P}\left(\tau_0 = \infty \middle| Y_0 = 0\right) > 0;$$

por outro lado, podemos concluir que se

$$p \leq 1/2 \text{ e } p \geq 1/2, \text{ isto é } p = 1/2,$$

então

$$\mathbb{P}\left(\tau_0 < \infty \middle| Y_0 = 0\right) = 1.$$

Concluímos que o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ é recorrente $\iff p = 1/2$.

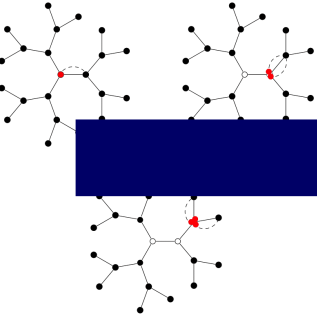
Uma propiedade útil

Proposição 1

Seja $(Y_n)_{n\geq 0}$ *o passeio aleatório em* $\mathbb{Z}$*. então, para cada* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$\mathbb{P}\left(\tau_n < \infty \middle| Y_0 = 0\right) = \begin{cases} 1, & se\ p \in [1/2, 1), \\ \{p/(1-p)\}^n, & se\ p \in (0, 1/2). \end{cases}$$

Prova. Ver em Modelos probabilísticos, P. M. Rodriguez. In: Actas del XV Congreso "Dr. Antonio A. R. Monteiro" (2019). Preprint: `https://www.pablo-rodriguez.org/publications`

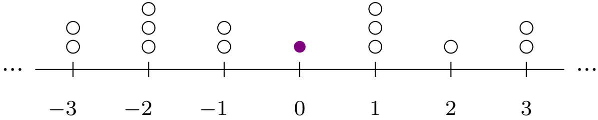


Modelo dos sapos em $\mathbb{Z}$

Universidade Federal de Pernambuco

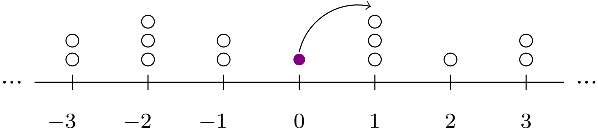
CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

O modelo dos sapos: ideia



○ partícula inativa ● partícula ativa

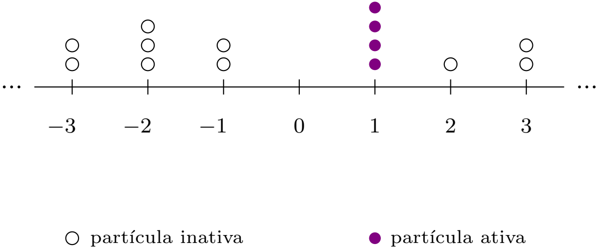
O modelo dos sapos: ideia



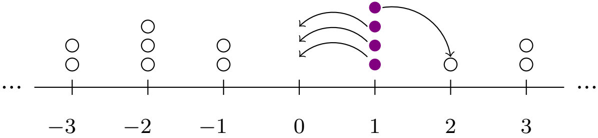
○ partícula inativa

● partícula ativa

O modelo dos sapos: ideia

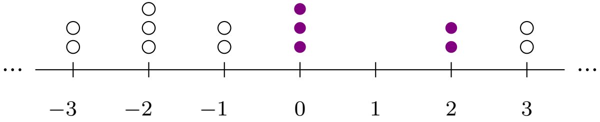


O modelo dos sapos: ideia



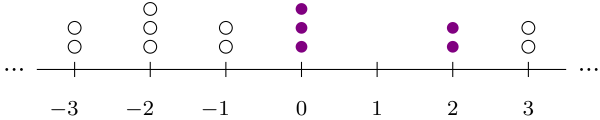
○ partícula inativa ● partícula ativa

O modelo dos sapos: ideia



○ partícula inativa ● partícula ativa

O modelo dos sapos: ideia



○ partícula inativa ● partícula ativa

Pergunta: o 0 será visitado infinitas vezes?

Definição 1

Dizemos que o modelo dos sapos em $\mathbb{Z}$ é recorrente se o 0 é visitado infinitas vezes, por partículas ativas, com probabilidade 1. Caso contrário dizemos que o modelo é transitório.

Observação

Sabemos que se $p = 1/2$ então o modelo dos sapos é recorrente.

Teorema de Gantert y Schmidt (2009)

Consideremos o modelo dos sapos em $\mathbb{Z}$ *com configuração inicial* $(\eta_x)_{x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ *e probabilidade de salto à direita* $p \in (1/2, 1)$*. O modelo é recorrente se, e somente se,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left(\frac{1-p}{p}\right)^i = \infty.$$

Ref.: N. Gantert, and P. Schmidt, *Recurrence for the frog model with drift on* $\mathbb{Z}$, Markov Process. Related Fields **15** n.1 (2009), 51-58.

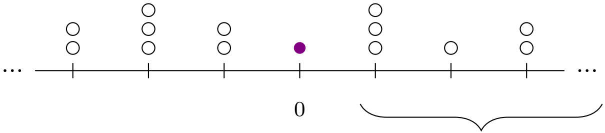
Prova do Teorema de Gantert e Schmidt. Denominamos cada partícula inativa que inicialmente está no vértice j de j-partícula, para todo $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Supomos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left(\frac{1-p}{p} \right)^i = \infty,$$

e definimos para cada $i \in \mathbb{Z}^+$ o evento

$$A_i = \{\text{o vértice } -i \text{ é visitado por alguma } j\text{-partícula, para algum } j \geq 1\}.$$

Como $p > 1/2$ sabemos da Prop. 1 que:



com probabilidade 1,

todas as j-partículas, para $j \geq 1$,

serão ativadas eventualmente!

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{\text{alguma } j\text{-partícula visita } -i\}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\{\text{nenhuma } j\text{-partícula visita } -i\}\right) \\
&= 1 - \lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{m}\left(1 - \left\{\frac{1-p}{p}\right\}^{j+i}\right)^{\eta_j}
\end{aligned}
$$

Agora, como $1 - x \leq e^{-x}$ para $x \in [0,1]$ temos que para todo $m \geq 1$

$$\prod_{j=1}^{m} \left(1 - \left\{\frac{1-p}{p}\right\}^{j+i}\right)^{\eta_j} \leq e^{-\sum_{j=1}^{m} \eta_j \{(1-p)/p\}^{j+i}},$$

e tomando limite quando $m \to \infty$ em ambos lados da desigualdade anterior concluímos que

$$\mathbb{P}(A_i) = 1 \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Logo, temos que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i\right) = 1.$$

Como cada partícula ativa realiza um passeio aleatório transiente com probabilidade de salto à direita dada por $p > 1/2$, se B_i denota o evento que alguma $(-i)$-partícula, uma vez ativada, visita o 0, para $i \in \mathbb{Z}^+$, então $P(B_i) = 1$ e concluímos como antes que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} B_i\right) = 1.$$

Finalmente, se A denota o evento que a partícula ativa inicialmente no vértice 0 visitará todos os vértices de $\mathbb{Z}^+$ concluimos que

$$\mathbb{P}\left(0 \text{ visitado i.v.}\right) = \mathbb{P}\left(0 \text{ visitado i.v.} \;\middle|\; A, \bigcap_{i \in \mathbb{Z}^+} \{A_i, \cap B_i\}\right) = 1.$$

Para demonstrar a outra parte do teorema, suponha que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \left(\frac{1-p}{p} \right)^i < \infty,$$

e note que

$$\mathbb{P}(0 \text{ ser visitado infinitas vezes}) \leq \mathbb{P}(-1 \text{ ser visitado ao menos una vez}).$$

Logo, usando a independência dos passeios aleatórios e razoando como na primeira parte da Prova temos que

$$\mathbb{P}(-1 \text{ visitado ao menos uma vez}) = 1 - \mathbb{P}(-1 \text{ nunca é visitado})$$

mas

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-1 \text{ nunca é visitado}) &= \lim_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{p} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \left\{ \frac{1-p}{p} \right\}^{j+1} \right)^{\eta_j} \right\} \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{p} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \eta_j \left\{ \frac{1-p}{p} \right\}^{j+1} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Logo, usando a independência dos passeios aleatórios e razoando como na primeira parte da Prova temos que

$$\mathbb{P}(-1 \text{ visitado ao menos uma vez}) = 1 - \mathbb{P}(-1 \text{ nunca é visitado})$$

mas

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-1 \text{ nunca é visitado}) &= \lim_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{p} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \left\{ \frac{1-p}{p} \right\}^{j+1} \right)^{\eta_j} \right\} \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{p} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \eta_j \left\{ \frac{1-p}{p} \right\}^{j+1} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Desigualdade de Bernoulli: se $x > -1$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, então $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Para finalizar recorremos a um útil resultado para produtos infinitos: se $(x_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência de números do intervalo $[0,1)$ então

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)=0 \text{ se, e somente se, } \sum_{i=1}^{\infty}x_i=\infty.$$

então,

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\eta_j\left\{\frac{1-p}{p}\right\}^{j+1}\right)>0$$

e así concluimos que o modelo dos sapos é transiente.

Referências

Modelos probabilísticos, Pablo M. Rodriguez.
In: Actas del XV Congreso "Dr. Antonio A. R. Monteiro" (2019).
Preprint: `https://www.pablo-rodriguez.org/publications`

Referencias adicionales:

O. Alves, F. Machado, and S. Popov, *Phase transition for the frog model*, Electron. J. Probab. **7** n.21 (2002), 16–21.

I. Benjamini, L.R. Fontes, J. Hermon, and F.P. Machado, *On an epidemic model on finite graphs*, Ann. Appl. Probab. **30** n.1 (2020), 208–258.

E. Lebensztayn, and P.M. Rodriguez, *A connection between a system of random walks and rumor transmission*, Phys. A **392** n.23 (2013), 5793–5800.

Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org
e-mail: pablo@de.ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza