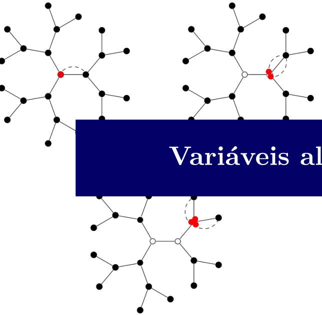
ET658 - Processos Estocásticos para Atuária

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



Variáveis aleatórias e distribuições discretas clássicas

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et658-processos-estocasticos

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 2

- Variáveis aleatórias (discretas).
- Esperança e variância.
- Distribuições clássicas.

Definição de Variável Aleatória

Dado um experimento aleatório com espaço amostral Ω, uma variável aleatória X é uma função

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

que associa a cada resultado $\omega \in \Omega$ um valor real $X(\omega)$.

Notação

Usualmente as variáveis aleatórias são representadas pelas letras maiúsculas: X, Y, Z, T etc; e abreviamos "variável aleatória" como: v.a.

Exemplo 2.1

Considere o experimento de lançar 3 *moedas honestas. Seja* N *o total de caras encontradas. Calcule* $P(N = k)$ *para cada* $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Solução. O espaço amostral deste experimento é dado por

$$\Omega = \{(m_1, m_2, m_3) : m_i \in \{C, \overline{C}\}, i \in \{1, 2, 3\}\},$$

então $|\Omega| = 8$. Note que:

$$\begin{aligned}
\{N = 0\} &= \{(\overline{C}, \overline{C}, \overline{C})\}; \\
\{N = 1\} &= \{(C, \overline{C}, \overline{C}), (\overline{C}, C, \overline{C}), (\overline{C}, \overline{C}, C)\}; \\
\{N = 2\} &= \{(C, C, \overline{C}), (C, \overline{C}, C), (\overline{C}, C, C)\}; \\
\{N = 3\} &= \{(C, C, C)\}.
\end{aligned}$$

Portanto: $P(N = 0) = \frac{1}{8}$, $P(N = 1) = \frac{3}{8}$, $P(N = 2) = \frac{3}{8}$ e $P(N = 3) = \frac{1}{8}$.

Exemplo 2.2

Considere o experimento de lançar um dado honesto. Repetições independentes deste experimento são realizadas até que o número 6 seja observado pela primeira vez. Chame de X o total de lançamentos realizados e calcule $P(X = k)$ para $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Solução: Considere o eventos

$$A_k = \text{“no } k - \text{ésimo lançamento saiu o número 6”},$$

para $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ e note que, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ são independentes.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \{N = 1\} &= A_1; \\ \{N = 2\} &= A_1^c \cap A_2; \\ \{N = 3\} &= A_1^c \cap A_2^c \cap A_3; \end{aligned}$$

e, em geral: $\{N = k\} = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{k-1}^c \cap A_k$.

Segue que, para cada k:

$$
\begin{aligned}
P(N=k) &= P\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{k-1}^c \cap A_k\right) \\
&= P(A_1^c)P(A_2^c)\cdots P(A_{k-1}^c)P(A_k) \qquad \text{(independência)} \\
&= \{1-P(A_1)\}\{1-P(A_2)\}\cdots\{1-P(A_{k-1})\}P(A_k) \\
&= \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Isto é:

$$
P(N=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}, \text{ para } k \in \mathbb{N}.
$$

Classificação de variáveis aleatórias

Para simplificar o estudo, variáveis aleatórias são classificadas em dois grandes grupos.

- Variáveis aleatórias discretas: são variáveis que assumem valores em um conjunto finito ou enumerável. Isto é, X é uma v.a. discreta se o conjunto de valores assumidos por X pode ser enumerado como:

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \text{ ou } \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

- Variáveis aleatórias contínuas: estas variáveis assumem quaisquer valores em um intervalo dos reais. Isto é, se X é uma v.a. contínua, então o conjunto de valores assumidos por X é do tipo

$$\mathbb{R} \text{ ou } [a, b] \text{ ou } [a, +\infty) \text{ etc.}$$

Variáveis aleatórias discretas

Exemplo 2.3

- *O número de lançamentos de um dado honesto sobre uma superfície plana que devem ser realizados até que um número menor que 4 seja observado na face superior;*
- *O número de filhas de uma família escolhida ao acaso na cidade de Recife para a realização de uma pesquisa;*
- *O número de dias com chuva na cidade de João Pessoa em um período de um ano.*

Função de probabilidade

Se X é uma variável aleatória discreta definimos a função de probabilidade $p(a)$ de X como:

$$p(a) = P(X = a).$$

Exemplo

Realize o lançamento de uma moeda viciada que tem probabilidade 3/4 de dar cara. Seja:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{quando o resultado é cara,} \\ 0 & \text{quando o resultado é coroa.} \end{cases}$$

então sua função de probabilidade é dada por:

$$p(1) = P(X = 1) = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad p(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}.$$

Indicadoras

Dado um evento qualquer A, uma variável aleatória I_A definida como:

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{se o evento } A \text{ ocorrer,} \\ 0 & \text{se o evento } A^c \text{ ocorrer,} \end{cases}$$

chama-se variável aleatória indicadora do evento A. Neste caso:

$$P(I_A = 1) = P(A) \qquad \text{e} \qquad P(I_A = 0) = P(A^c) = 1 - P(A).$$

Propriedades

Se X toma valores no conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ então:

- Temos para a função de probabilidade p que:

$$\begin{aligned} p(x_i) &= P(X = x_i) \geq 0, \text{ para } i \in \{1, 2, \ldots\}; \\ p(a) &= P(X = a) = 0, \text{ para todo } a \neq x_i, \text{ com } i \in \{1, 2, \ldots\}. \end{aligned}$$

- Sempre vale que $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$. De fato, se X toma valores em $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ então:

$$\text{Como } \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\} = \Omega$$

temos que:

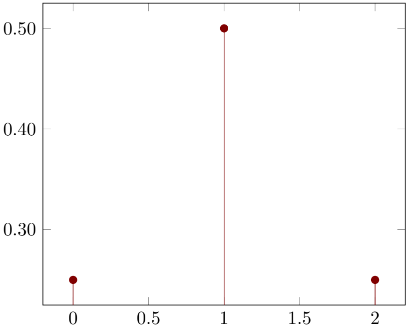
$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i).$$

Representação

A função de probabilidade é representada em um gráfico desenhando $p(x_i)$ no eixo y em função de x_i no eixo x.

Exemplo 2.4

Se X *tem função de probabilidade dada por* $p(0) = 0,25$, $p(1) = 0,5$ *e* $p(2) = 0,25$ *então:*



Exemplo 2.5

Uma loja online distribui 10 *tipos distintos de cupons de desconto para seus clientes. Uma pessoa, tentando conseguir descontos em alguns itens específicos, começa a recolher cupons com amigos e conhecidos, até conseguir cupons dos tipos* 1 *ou* 3*. Suponha que, independentemente dos tipos já recolhidos, cada novo cupom obtido tenha a mesma probabilidade de ser de qualquer tipo. Se X denota o número de cupons recolhidos, determine a função de probabilidade de X.*

Solução. Note que X toma valores no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Por outro lado, para cada i considere o evento

$$A_i = \text{“o } i-\text{ésimo cupom recolhido é do tipo 1 ou do tipo 3.”}$$

Note que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots\}$ vale que

$$P(A_i) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

... e que os eventos A_i são independentes entre si.

. . . continuação do Exemplo 2.5. Como

$$\{X = i\} = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i$$

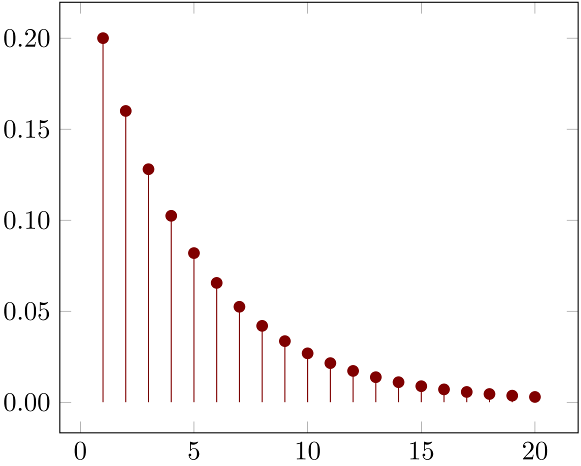
então

$$\begin{aligned} P(X = i) &= P\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i\right) \\ &= P\left(A_1^c\right) \times P\left(A_2^c\right) \times \cdots \times P\left(A_{i-1}^c\right) \times P\left(A_i\right) \end{aligned}$$

e portanto

$$p(i) = \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) \times \cdots \times \left(\frac{4}{5}\right)}_{i-1 \text{ vezes}} \times \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{5}\right).$$

Ilustração da $p(i)$ do exemplo anterior!



Exemplo 2.6

A função de probabilidade de uma variável aleatória X é dada por

$$p(i) = c \times \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i \in \{0, 1, 2 \ldots\}$$

onde λ é algum valor positivo. Determine: (a) $P(X = 0)$ e (b) $P(X > 2)$.

Solução. O primeiro que deve ser observado é que a função de probabilidade de X está dependendo de duas constantes: c e λ. Para que esta função de fato seja uma probabilidade deve ser $c \geq 0$. Vamos verificar se existe alguma outra restrição para estas constantes. Como

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$$

temos que $c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = 1$ mas sabemos que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda}$ e portanto:

... deve ser $c = e^{-\lambda}$.

... continuação do Exemplo 2.6. Acabamos de verificar que

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

e que não há restrições adicionais para λ (parâmetro da distribuição).

(a) Note que $P(X = 0) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$.

(b) Note que $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$ e como

$$\{X \leq 2\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\},$$

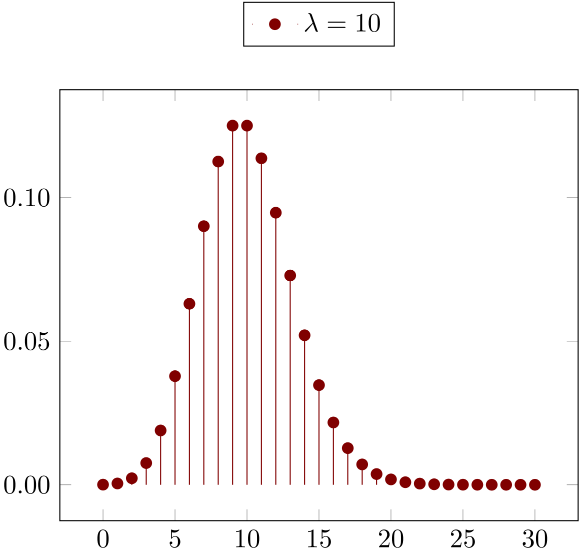
temos que
$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \\ &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto $P(X > 2) = 1 - e^{-\lambda}\left(2 + \dfrac{\lambda^2}{2}\right)$.

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Ilustração da $p(i)$ do exemplo anterior!



Valor esperado

Se X é uma variável aleatória com função de probabilidade $p(x)$ então a esperança de X, denotada por $E[X]$, é definida por

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} x\, p(x).$$

Interpretação: A esperança, também chamada de valor esperado ou média de X, é uma média ponderada dos possíveis valores que X pode receber, com cada valor sendo ponderado pela probabilidade de que X seja igual a esse valor.

Deste modo é uma espécie de *ponto de equilíbrio*, em torno do qual valores de X se distribuem. Por essa razão é também conhecida como uma das medidas de posição da distribuição de X.

Exemplo 2.7

Se a função de probabilidade de X *é dada por*

$$p(1) = p(3) = \frac{1}{2}$$

então

$$E[X] = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+3}{2} = 2$$

é a média ordinária dos dois valores possíveis de X.

Exemplo 2.8

Se a função de probabilidade de X é dada por

$$p(1) = \frac{1}{3} \qquad p(3) = \frac{2}{3}$$

então

$$E[X] = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1 + 2 \cdot 3}{3} = \frac{7}{3} = 2,33$$

é uma média ponderada dos dois valores possíveis, 1 e 3, onde ao valor 3 se dá duas vezes mais peso do que ao valor 1, pois

$$p(3) = 2p(1).$$

Exemplo

Uma turma com 120 estudantes é levada em 3 ônibus para a apresentação de uma orquestra sinfônica. Há 36 estudantes em um dos ônibus, 40 no outro e 44 no terceiro ônibus. Quando os ônibus chegam, um dos 120 estudantes é escolhido aleatoriamente. Suponha que X represente o número de estudantes que vieram no mesmo ônibus do estudante escolhido e determine $E[X]$.

Solução. Como o estudante escolhido aleatoriamente pode ser, com mesma probabilidade, qualquer um dos 120 estudantes, temos que

$$P(X = 36) = \frac{36}{120} \qquad P(X = 40) = \frac{40}{120} \qquad P(X = 44) = \frac{44}{120}.$$

Então,

$$E[X] = 36\left(\frac{36}{120}\right) + 40\left(\frac{40}{120}\right) + 44\left(\frac{44}{120}\right) = \frac{1208}{30} = 40,2667.$$

Problema

Suponha que X é uma variável aleatória com função de probabilidade:

$$P(X = -1) = 0,2 \qquad P(X = 0) = 0,5 \qquad P(X = 1) = 0,3.$$

Calcule $E[X^2]$.

Solução. Note que o problema é calcular a esperança de uma função de uma variável aleatória. Como $Y = X^2$ é também uma variável aleatória, uma forma de fazer isto é encontrando sua função de probabilidade. Isto é:

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,5$$

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = 0,5.$$

Logo,

$$E[X^2] = E[Y] = 0\,P(Y = 0) + 1\,P(Y = 1) = 0 \times (0,5) + 1 \times (0,5) = 0,5.$$

Esperança de uma função de uma variável aleatória

Theorem 1

Seja X uma variável aleatória discreta com possíveis valores x_i, $i \geq 1$ e função de probabilidade $p(a)$. Então, para qualquer função real g,

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p(x_i).$$

... voltando ao exemplo anterior, note que agora pelo teorema:

$$E[X^2] = (-1)^2 \times (0,2) + 0^2 \times (0,5) + 1^2 \times (0,3) = 1 \times (0,2 + 0,3) + \times (0,5) = 0,5.$$

Propriedade

Mais uma propriedade importante é a seguinte: Se a e b são constantes, então

$$E[aX + b] = a\,E[X] + b.$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \sum_{x:p(x)>0} (ax + b)\,p(x) \\ &= a \sum_{x:p(x)>0} x\,p(x) + b \sum_{x:p(x)>0} p(x) \\ &= a\,E[X] + b. \end{aligned}$$

Variância: Motivação

Para uma variável aleatória discreta X, o valor esperado $E[X]$ dá uma média ponderada dos valores possíveis de X mas não diz nada sobre a variação destes valores. Por exemplos as v.a. W, Y e Z com funções de probabilidade dadas por:

$$P(W = 0) = 1,$$

$$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$$

$$P(Z = 100) = P(Z = -100) = \frac{1}{2}$$

são tais que $E[W] = E[Y] = E[Z] = 0$, porém a variação dos seus possíveis valores é bem diferente.

Uma forma de representar estas variações é através da variância!

Variância: Definição

Se X é uma variável aleatória com média $\mu = E[X]$, então a variância de X, representada por $Var[X]$, é definida como

$$Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right].$$

Observação

Note que $Var[X]$ está nos dizendo quão distante está X, em média, da sua esperança μ.

Uma fórmula útil!

Uma fórmula muito útil para a variância de uma variável aleatória X é:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \,.$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned}
Var[X] &= E\left[(X-\mu)^2\right] \\
&= \sum_x (x-\mu)^2\, p(x) \\
&= \sum_x (x^2 - 2\mu + \mu^2)\, p(x) \\
&= \sum_x x^2\, p(x) - 2\mu \sum_x x\, p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) \\
&= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E[X^2] - \mu^2.
\end{aligned}$$

Problema

Calcule $Var[X]$ para a variável aleatória X que representa o resultado de um dado honesto.

Solução. Sabemos que $E[X] = 7/2$. Por outro lado,

$$E[X^2] = 1^2\left(\frac{1}{6}\right)+2^2\left(\frac{1}{6}\right)+3^2\left(\frac{1}{6}\right)+4^2\left(\frac{1}{6}\right)+5^2\left(\frac{1}{6}\right)+6^2\left(\frac{1}{6}\right) = 91\left(\frac{1}{6}\right).$$

Então,

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Propriedade

Vamos ver uma propriedade importante da variância: Se a e b são constantes, então

$$Var[aX + b] = a^2\, Var[X].$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} Var[aX + b] &= E[(\{aX + b\} - \{a\,\mu + b\})^2] \\ &= E[(aX + b - a\,\mu - b)^2] \\ &= E[a^2(X - \mu)^2] \\ &= a^2 E[(X - \mu)^2] \\ &= a^2\, Var[X]. \end{aligned}$$

Distribuição Bernoulli

X tem *distribuição de Bernoulli* com parâmetro $p \in (0,1)$ se:

$$p(1) = p \quad \text{e} \quad p(0) = 1 - p.$$

Notação: $X \sim Bernoulli(p)$.

Observação!

Um experimento com apenas dois resultados possíveis, sucesso ou fracasso, chama-se ensaio de Bernoulli.

Exemplo 2.9

Seja X a variável aleatória indicadora do evento A com $P(A) = p$:

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{se } A \textit{ ocorre}, \\ 0, & \textit{se } A \textit{ não ocorre}. \end{cases}$$

Então $X \sim Bernoulli(p)$.

Exemplo 2.10

Considere o lançamento de um dado honesto e seja X a variável aleatória indicadora da ocorrência de um valor menor ou igual do que 4. Então, como

$$P(X=1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}, \quad e \quad P(X=0)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

temos que

$$X \sim Bernoulli\left(\frac{2}{3}\right).$$

Esperança e variância de uma Bernoulli

Se $X \sim Bernoulli(p)$ então $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1-p)$.

De fato, lembre que

$$E(X) = P(X = 1) = p$$

e como $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ e

$$E(X^2) = P(X = 1) = p,$$

temos que:

$$Var(X) = p - p^2 = p(1-p).$$

Distribuição Binomial

X tem *distribuição Binomial* com parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ se:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \text{ para } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Notação: $X \sim B(n, p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados.

Note que, para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, por exemplo a configuração

$$\sigma : \underset{1}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{2}{\underline{\times}} \quad \underset{3}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{4}{\underline{\times}} \quad \underset{5}{\underline{\checkmark}} \quad \cdots\cdots \quad \underset{n-3}{\underline{\times}} \quad \underset{n-2}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{n-1}{\underline{\times}} \quad \underset{n}{\underline{\checkmark}}$$

i sucessos ($\checkmark$)
$n - i$ fracassos ($\times$)

é favorável para a ocorrência de $\{X = i\}$. Como temos $\binom{n}{i}$ formas diferentes de obter uma configuração destas e como

$$P(\sigma) = p^i (1-p)^{n-i},$$ por independência!

Note que, para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, por exemplo a configuração

$$\sigma : \underset{1}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{2}{\underline{\times}} \quad \underset{3}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{4}{\underline{\times}} \quad \underset{5}{\underline{\checkmark}} \quad \cdots\cdots \quad \underset{n-3}{\underline{\times}} \quad \underset{n-2}{\underline{\checkmark}} \quad \underset{n-1}{\underline{\times}} \quad \underset{n}{\underline{\checkmark}} \qquad \begin{array}{r} i \text{ sucessos } (\checkmark) \\ n - i \text{ fracassos } (\times) \end{array}$$

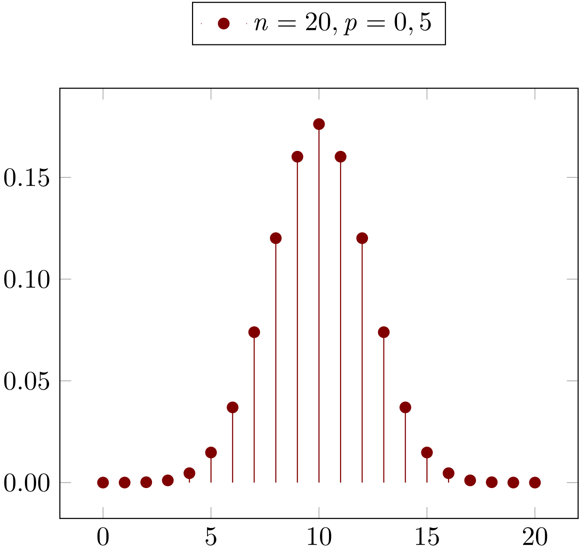
é favorável para a ocorrência de $\{X = i\}$. Como temos $\binom{n}{i}$ formas diferentes de obter uma configuração destas e como

$$P(\sigma) = p^i(1-p)^{n-i}, \quad \longrightarrow \text{por independência!}$$

concluímos que

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

$p(i)$



Se $X \sim B(n,p)$ podemos escrever

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

em que $X_1, \ldots, X_n$ são i.i.d. com $X_1 \sim Bernoulli(p)$.

Observação!

A notação i.i.d. é usada para dizer que as variáveis são independentes e identicamente distribuídas.

No Exemplo 2.10, suponha que o dado e lançado 10 vezes e que os resultados de lançamentos distintos são independentes. Calcule:

a. A probabilidade de que em pelo menos duas oportunidades resulte um valor menor ou igual do que 4.
b. A probabilidade de que sempre resulte um valor maior do que 4.

Solução. Seja Y o número de lançamentos, dos 10, nos quais resulta um valor menor ou igual do que 4. Então,

$$Y \sim B\left(10, \frac{2}{3}\right).$$

Então:

a.

$$P(Y=0) = \binom{10}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}.$$

b.

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) \\
&= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) \\
&= 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{9} \\
&= 1 - \frac{1}{3^{10}} - \frac{20}{3^{10}} \\
&= 1 - \frac{19}{3^{10}}.
\end{aligned}$$

Esperança e variância de uma Binomial

Se $X \sim B(n, p)$ então $E(X) = np$ e $Var(X) = np(1-p)$.

Como

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} n \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} && \text{usando } i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1} \\
&= p \sum_{j=0}^{n-1} n \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} && \text{fazendo } j = i-1 \\
&= np
\end{aligned}
$$

$\ldots$ sendo a última pois $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} = 1$.

Exercício: Calcule $E(X^2)$ (ver Ross, pág. 175) e depois $Var(X)$.

Distribuição de Poisson

X tem *distribuição de Poisson* com parâmetro $\lambda \in (0, \infty)$ se:

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \text{ para } i \in \{0, 1, \dots\}.$$

Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$.

Observação!

X pode ser interpretada como uma aproximação para o número de sucessos obtidos quando n ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, são realizados, assumindo valores grandes de n e pequenos de p.

Aproximação da Binomial para a Poisson

Seja $X \sim B(n, p)$, n grande, e seja $Y \sim Poisson(\lambda)$ com $\lambda = np$.

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

que podemos reescrever:

$$P(X = i) = \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\{i-1\})}{n^i} \right\} \left(\frac{\lambda^i}{i!}\right) \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i}.$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO CCEN CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

Aproximação da Binomial para a Poisson

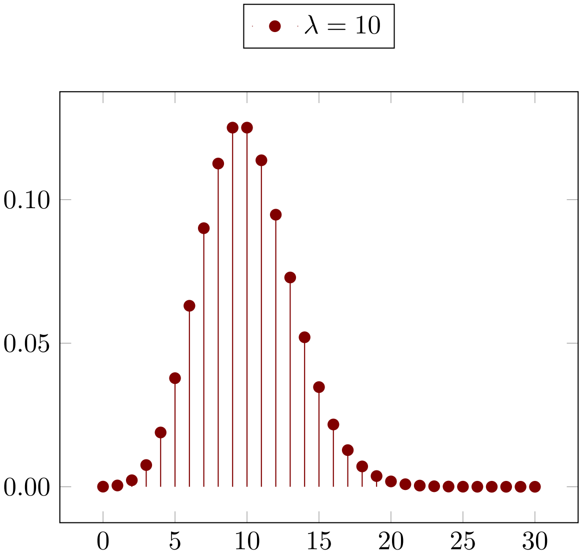
Como

$$1 - \frac{j}{n} \approx 1, \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1,$$

concluimos que

$$P(X = i) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = P(Y = i).$$

$p(i)$



Esperança e variância de uma Poisson

Se $X \sim Poisson(\lambda)$ então $E(X) = \lambda$ e $Var(X) = \lambda$. Note que:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{ie^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j}}{j!} \qquad \text{fazendo } j = i-1 \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

... sendo a última pois $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = 1$.

Exercício: Verifique que $E(X^2) = \lambda(\lambda + 1)$ (Ross, pág. 184).

Distribuição Geométrica

X tem *distribuição geométrica* com parâmetro $p \in (0,1)$ se:

$$p(i) = p(1-p)^{i-1}, \text{ para } i \in \mathbb{N}.$$

Notação: $X \sim Geom(p)$.

Observação!

X pode ser interpretada como o número de ensaios independentes de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p, que devem ser realizados até obter o primeiro sucesso.

Pensando na interpretação de X, note que se

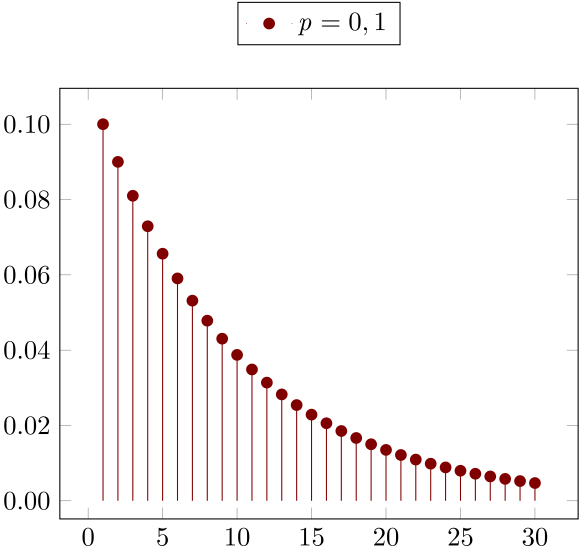
$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo ensaio resulta em sucesso,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, então:

$$P(X = i) = P\left(\left\{\bigcap_{k=1}^{i-1}\{X_k = 0\}\right\} \cap \{X_i = 1\}\right) = (1-p)^{i-1}p.$$

por independência!

$p(i)$



Esperança e variância de uma Geométrica

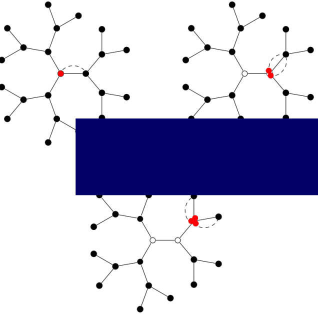
Se $X \sim Geometrica(p)$ então $E(X) = 1/p$ e $Var(X) = (1-p)/p^2$.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}p \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1+1)(1-p)^{i-1}p \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)(1-p)^{i-1}p + \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1}p \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j}p + 1 \\
&= (1-p)\sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1}p + 1 \\
&= (1-p)E(X) + 1
\end{aligned}
$$

Então $E(X) = (1-p)E(X) + 1$. Isto é $E(X) = 1/p$.

Referência!

Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.



Bom estudo!