Aula 21: Teoremas limite

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Teorema da Convergência Monótona.
- Teorema da Convergência Dominada.
- Convergência em Probabilidade.
- Convergência Quase Certa.

Teoremas de convergência

Lembrete!

No que segue se considera um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Dada uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e uma variável aleatória X, usamos a notação:

$$X_n \to X \text{ para dizer que, } \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

Pergunta: Supondo que $X_n \to X$, quando vale que $E(X_n) \to E(X)$?

$X_n \to X \not\Rightarrow E(X_n) \to E(X)$

Exemplo 21.1

Seja $X \sim Cauchy(0,1)$ *e defina, para cada* $n \geq 1$*:*

$$X_n = \begin{cases} X, & se \ \ X \in [-n, n], \\ 0, & se \ \ X \notin [-n, n]. \end{cases} \qquad \textit{(Cauchy truncada)}$$

Note que, para cada $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega),$$

mas, enquanto $E(X_n) = 0$ *para todo* $n \geq 1$, $E(X)$ *não existe.*

Universidade Federal de Pernambuco · CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Teorema da Convergência Monótona

Teorema 21.1

Sejam $X, X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias. Se $0 \leq X_n \nearrow X$, então:

$$E(X_n) \nearrow E(X).$$

Observação!

Notação: Com $X_n \nearrow X$ denotamos que $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

Prova. Como $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n \leq \cdots \leq X$, então:

$$0 \leq E(X_1) \leq E(X_2) \leq \cdots \leq E(X_n) \leq \cdots \leq E(X), \quad \text{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) \leq E(X).$$

Vamos verificar que, para todo $\epsilon > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) \geq E(X) - \epsilon$.

. . . continuação da prova do TCM. Dado $\epsilon > 0$, definimos a variável aleatória:

$$Y = \begin{cases} n\epsilon, & \text{se } X \in (n\epsilon, (n+1)\epsilon], \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \\ 0, & \text{se } X = 0. \end{cases}$$

Note que

$$X - \epsilon \leq Y \leq X$$

e portanto $E(X) - \epsilon \leq E(Y) \leq E(X)$. Vamos mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) \geq E(Y).$$

... ideias finais da prova do TCM.

1. Definindo:

$$A_k := \{X_k \geq Y\} \text{ e } B_n := \{X \in (n\epsilon, (n+1)\epsilon]\},$$

temos que $A_k \nearrow \Omega$ e $B_n \cap A_k \nearrow B_n$ quando $k \to \infty$.

2. Definindo $I_{A_k}(\omega) = 1$ se $\omega \in A_k$ ou $I_{A_k}(\omega) = 0$ se $\omega \in A_k^c$ temos:

$$0 \leq Y\, I_{A_k} \leq X_k \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq E(YI_{A_k}) \leq E(X_k).$$

3. Como

$$E(X_k) \geq E(YI_{A_k}) = \sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon P(B_n \cap A_k) \geq \sum_{n=0}^{m} n\epsilon P(B_n \cap A_k),$$

fazendo $k \to \infty$, temos de (1), que

$$\lim_{k\to\infty} E(X_k) \geq \sum_{n=0}^{m} n\epsilon P(B_n) \to E(Y) \text{ se } m \to \infty$$

Teorema da Convergência Dominada

Teorema 21.2

Sejam $Y, X, X_1, X_2, \ldots$ *variáveis aleatórias tais que* Y *é integrável,* $|X_n| \leq Y$ *para todo* $n \geq 1$ *e* $X_n \to X$*. Então,* X_n, X *são integráveis e*

$$E(X_n) \nearrow E(X).$$

Ideia da prova. A integrabilidade é direta. Agora, defina

$$Y_n := \inf_{k \geq n} X_k,$$

e note que $Y_n \nearrow X$ pois para cada $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \inf_{k\geq n} X_k(\omega) \right\} = \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega).$$

$$\text{Portanto, } (Y_n + Y) \nearrow (X + Y).$$

Ideia da prova do TCD. Agora:

$$X_n \geq -Y \implies Y_n = \inf_{k\geq n} X_k \geq -Y \implies Y_n + Y \geq 0.$$

O TCM implica que

$$E(Y_n + Y) \nearrow E(X+Y) \Longrightarrow E(Y_n) \nearrow E(X).$$

Análogamente, se $Z_n := \sup_{k\geq n} X_k$ podemos mostrar que

$$E(Z_n) \searrow E(X).$$

Para finalizar, use que

$$Y_n = \inf_{k\geq n} X_k \leq X_n \leq \sup_{k\geq n} X_k = Z_n$$

implica $E(Y_n) \leq E(X_n) \leq E(Z_n)$, e tome limite quando $n \to \infty$.

Esperança da soma de ∞ variáveis aleatórias

Seja $X_1, X_2, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que

1. $P(X_n \geq 0) = 1$ para $n \in \{1, 2, \dots\}$, ou
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} E(|X_i|) < \infty$.

Então, $E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)$. De fato, defina

$$Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_n, \quad Y = \sum_{i=1}^{\infty} X_n.$$

1. TCM: Note que $0 \leq Y_n \nearrow Y$, então $E(Y_n) \nearrow E(Y)$.
2. TCD: $Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |X_i|$ é integrável, $|Y_n| \leq Z$ e $Y_n \nearrow Y$, então

$$E(Y_n) \nearrow E(Y).$$

Exemplo 21.2

Se $X \geq 0$ é uma v.a. discreta tomando valores nos inteiros, então

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i).$$

De fato, se consideramos, para $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se } X \geq i, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \sum_{i=1}^{X} X_i + \sum_{i=X+1}^{\infty} X_i = \sum_{i=1}^{X} 1 + \sum_{i=X+1}^{\infty} 0 = X.$$

Logo, $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i).$

Convergência em probabilidade: $X_n \xrightarrow{P} X$

Considere uma sequência de variáveis aleatórias $X, X_1, X_2, \ldots$

Dizemos que X_n converge para X em probabilidade se:

$$\text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ vale que } \lim_{n \to \infty} P\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Notação: $X_n \xrightarrow{P} X$.

Observação!

$X_n \xrightarrow{P} X$ se $\forall \epsilon > 0$ temos $P\left(|X_n - X| < \epsilon\right) \approx 1$ para n suficientemente grande.

Convergência quase certa: $X_n \overset{q.c.}{\to} X$

Considere uma sequência de variáveis aleatórias $X, X_1, X_2, \ldots$

Dizemos que X_n converge para X quase certamente se:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1.$$

Notação: $X_n \overset{q.c.}{\to} X$.

Observação!

$X_n \overset{q.c.}{\to} X$ se $P(A) = 1$, onde $A := \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$.

Observação!

Em geral, dizemos que um evento A ocorre quase certamente se $P(A) = 1$.

Exemplo 21.3

Considere $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$, λ *a medida de Lebesgue.*

Defina a sequência:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n, & se\ \omega \in [0, 1/n]\,, \\ \\ 0, & se\ \omega \in (1/n, 1]\,, \end{cases}$$

para todo $\omega \in [0,1]$ *e* $n \geq 1$. *Então*

$$X_n \overset{q.c.}{\to} 0$$

pois para $\omega \in (0,1]$ *temos que* $X_n(\omega) \to 0$ *e* $\lambda(0,1] = 1$. *Mas, se* $\omega = 0$

$$\lim_{n\to\infty} X_n(0) = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Teorema 21.3

$X_n \xrightarrow{q.c.} X$ *implica* $X_n \xrightarrow{P} X$.

Prova. Suponha que $X_n \xrightarrow{q.c.} X$. Então, se

$$A := \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$$

então $P(A) = 1$. Em outras palavras:

$$\begin{aligned}
1 &= P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) \\
&= P\left(\forall \epsilon > 0\, \exists n \geq 1 \text{ tal que } \forall k \geq n \text{ vale que } |X_k - X| < \epsilon\right) \\
&\leq P\left(\bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| < \epsilon\}\right) \quad \text{(sequência enumerável)}
\end{aligned}$$

... continuação da prova do Teorema (21.3). Então, dado $\epsilon > 0$ temos:

$$1 = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| < \epsilon\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| < \epsilon\}\right)$$

$$\leq P(|X_n - X| < \epsilon)$$

Então, dado $\epsilon > 0$ temos que:

$$1 = \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \epsilon\right),$$

isto é: $X_n \xrightarrow{P} X$.

Motivação: Lei Fraca dos Grandes Números

Teorema 21.4

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias i.i.d., $\sigma^2 := Var(X_1) < \infty$. Se

$$\mu := E(X_1) \quad e \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \textit{então:}$$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Prova. Seja $\epsilon > 0$, então

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{Var\left(S_n/n\right)}{\epsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)}{n^2\epsilon^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2\epsilon} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon} \longrightarrow 0,$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Bom estudo!