Aula 5: Variáveis aleatórias

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Variáveis aleatórias
- Funções de distribuição
- Tipos de variáveis aleatórias

Informalmente: $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Experimento: Jogue dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores. Se X = soma dos números observados, então para $\omega = (i, j) \in \Omega$ é $X(\omega) = i + j$.

Ω	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$\{X = 5\}$

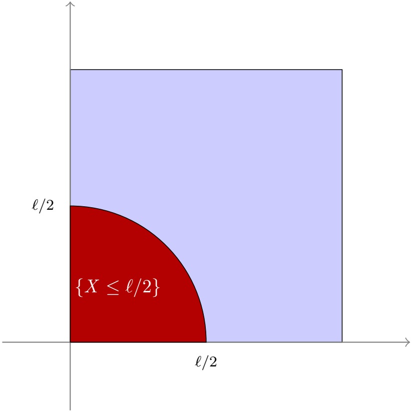
Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Informalmente: $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Experimento 2: Escolha ao acaso um ponto do quadrado de lado ℓ. Se X = distância entre o ponto escolhido e a origem, então para todo $\omega = (x, y) \in \Omega$, $X(\omega) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Isto é:



Variável aleatória

Lembrete!

No que segue se considera um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Uma variável aleatória X é uma função $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação!

Usamos a seguinte notação: $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$.

Função de distribuição

Seja X uma variável aleatória. A função de distribuição de X é:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proposição 5.1

Seja X uma variável aleatória e F sua função de distribuição. Então:

F1. *F é não-decrescente. Isto é, se $x \leq y$ então $F(x) \leq F(y)$.*

F2. *F é continua à direita. Isto é, se $x_n \searrow y$ então $F(x_n) \searrow F(y)$.*

F3. $\lim\limits_{x_n \searrow -\infty} F(x_n) = 0$ *e* $\lim\limits_{x_n \nearrow +\infty} F(x_n) = 1$. *Neste caso, denotamos:*

$$F(-\infty) = 0 \quad e \quad F(+\infty) = 1.$$

Prova da Prop. 5.1:

F1: $x \leq y$ então $F(x) \leq F(y)$. Se $x \leq y$ então, para $\omega \in \Omega$ tal que:

$$X(\omega) \leq x \quad \text{temos que} \quad X(\omega) \leq y.$$

Isto é,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \subset \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq y\}.$$

Logo,

$$\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\},$$

e assim

$$F(x) = P(X \leq x) \leq P(X \leq y) = F(y).$$

Prova da Prop. 5.1:

F2: $x_n \searrow y$ **então** $F(x_n) \searrow F(y)$. Se $x_n \searrow y$ então:

$$\text{para todo } n \text{ é } x_{n+1} \leq x_n \text{ e } \lim_{n\to\infty} x_n = y.$$

Então,

$$\{X \leq x_{n+1}\} \subset \{X \leq x_n\}, \text{ para todo } n,$$

e assim $\{X \leq x_n\} \searrow$ (é sequência não-crescente de eventos). Logo

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}\right) = P(X \leq y) = F(y).$$

Verificar!

Note que: $F(x_n) \searrow F(y)$

Prova da Prop. 5.1:

F3: $\lim_{x_n \searrow -\infty} F(x_n) = 0$. Se $x_n \searrow -\infty$ então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \le x_n\} = \emptyset \tag{1}$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \le x_n) = 0.$$

De fato, para obter (1) note que

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \le x_n\} \iff \omega \in \{X \le x_n\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Mas isto acontece $\iff$ $X(\omega) \le x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, como $x_n \searrow -\infty$, temos que tal ω não existe.

Prova da Prop. 5.1:

F3: $\lim_{x_n \nearrow +\infty} F(x_n) = 1$. Se $x_n \nearrow +\infty$ então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \Omega.$$

Então

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} P(X \leq x_n) = 1.$$

Proposição 5.2

Seja X uma variável aleatória e F sua função de distribuição. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que

$$F(x) - F(x-) = P(X = x).$$

Prova. Note que

$$\begin{aligned} F(x) - F(x-) &= F(x) - \lim_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) \\ &= P(X \leq x) - \lim_{n\to\infty} P\left(X \leq x - \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{P(X \leq x) - P\left(X \leq x - \frac{1}{n}\right)\right\} \end{aligned}$$

... continuação da prova da Prop. 5.2. Como:

$$\left\{X \leq x - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}, \ \{X \leq x\} \in \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \left\{X \leq x - \frac{1}{n}\right\} \subset \{X \leq x\}$$

temos que

$$\left\{x - \frac{1}{n} < X \leq x\right\} = \{X \leq x\} \cap \left\{X \leq x - \frac{1}{n}\right\}^c \in \mathcal{F}$$

e

$$P\left(x - \frac{1}{n} < X \leq x\right) = P(X \leq x) - P\left(X \leq x - \frac{1}{n}\right).$$

Isto é, $F(x) - F(x-) = \lim_{n \to \infty} P\left(x - \frac{1}{n} < X \leq x\right) = P(X = x).$

Observação

F é continua se, e somente se, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $P(X = x) = 0$.

Sobre os pontos de descontinuidade de F

F tem um número finito ou enumerável de pontos de descontinuidade.

De fato, se

$$\mathcal{C}(F) = \{x \in \mathbb{R} : F \text{ é continua em } x\}$$

e

$$\Lambda_n = \left\{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x-) > \frac{1}{n}\right\},$$

então $\mathcal{C}(F)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$. Mas Λ_n tem no máximo n elementos.

Tipos de variáveis aleatórias

Uma variável aleatória X é:

- discreta se $X(\omega) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ para todo $\omega \in \Omega$, para algum conjunto $\mathcal{S}$ finito ou enumerável. Neste caso

$$p(i) := P(X = i), i \in \mathcal{S},$$

  é a função de probabilidade de X.

- (absolutamente) contínua se existe $f(x) \geq 0$ tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

  Neste caso f é a função densidade de probabilidade de X.

Exemplo 5.1

Problema da coleção de cupons. *Existem n tipos de cupons e cada vez que um colecionador pega um cupom, este tem, independentemente das seleções anteriores, a mesma probabilidade de ser de qualquer um dos n tipos. Uma variável aleatória de interesse é o número de cupons que precisam ser recolhidos até obter uma coleção completa de pelo menos um cupom de cada tipo. Seja X esta variável aleatória, vamos encontrar $P(X = k)$.*

- *Note que*

$$\{X > k-1\} = \{X = k\} \cup \{X > k\},$$

então

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k).$$

... continuação do Exemplo 5.1. Para encontrar $P(X > k)$, fixe k e considere os eventos:

$A_j =$ "nenhum cupom do tipo j está nos primeiros k cupons recolhidos",

para $j \in \{1, \ldots, n\}$. Note que

$$
\begin{aligned}
P(X > k) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).
\end{aligned}
$$

... continuação do Exemplo 5.1. Mas

$$P(A_j) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k,$$

para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Da mesma forma,

$$P(A_i \cap A_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^k,$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ com $i \neq j$ e, em geral

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_\ell}) = \left(\frac{n-\ell}{n}\right)^k,$$

para $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq n$. Logo,

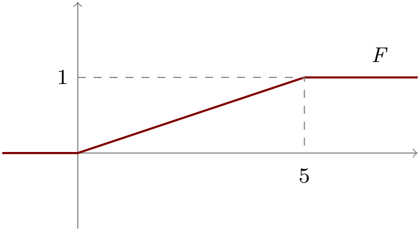
$$P(X > k) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \left(\frac{n-i}{n}\right)^k (-1)^{i+1}.$$

Densidades e funções de distribuição

Usamos o seguinte critério: X tem densidade se:

- $F(x) = P(X \leq x)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$;
- F é derivável no interior de um número finito ou enumerável de intervalos fechados cuja união é $\mathbb{R}$. Neste caso $f(x) = F'(x)$.

Exemplo 5.2

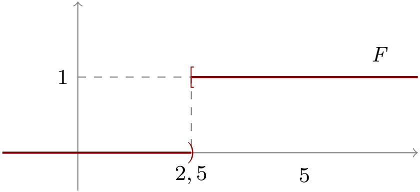


$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in (0,5) \\ 0, & se\ x \notin (0,5) \end{cases}$$

$$Se\ I \subset (0,5),\ P(X \in I) = |I|/5$$

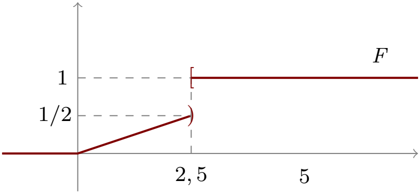
Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Exemplo 5.3



Neste caso $P(X = 2,5) = 1$.

Exemplo 5.4



X *é variável aleatória mista.*

Bom estudo!