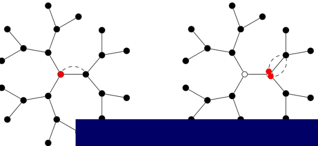
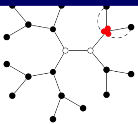
PGE966 - Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



CADEIAS DE MARKOV A TEMPO DISCRETO



Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Recorrência e transiência.

Lembrete: Cadeia de Markov

Uma cadeia de Markov a tempo discreto (CMTD) com espaço de estados $\mathcal{S}$ é um processo estocástico $(X_n)_{n\geq 0}$ com valores em $\mathcal{S}$ tal que

$$P(X_{n+1} = j | \underbrace{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}}_{\text{pasado}}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

futuro presente

para todo $n \geq 0$ e para todo subconjunto $\{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j\} \subset \mathcal{S}$.

Lembre que: para todo $i, j \in \mathcal{S}$ denotamos

- $p(i,j) := P(X_{n+1} = j | X_n = i)$, para todo $n \geq 0$;
- $p_n(i,j) := P(X_{m+n} = j | X_m = i)$, para todo $m, n \geq 0$.

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Equações de Chapman-Kolmogorov

Proposição 1.1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$*. Então,*

$$p_{n+r}(i,j) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_n(i,k)p_r(k,j),$$

para todo $n, r \geq 0$ *e* $i, j \in \mathcal{S}$*.*

Corolário 1.1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$*. Então,*

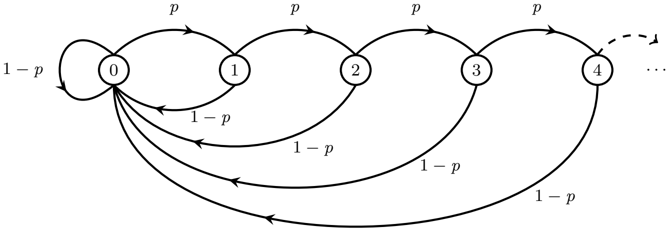
$$p_n(i,j) \geq p_{n_1}(i,i_1)\,p_{n_2}(i_1,i_2)\cdots p_{n_{k-1}}(i_{k-2},i_{k-1})\,p_{n_k}(i_{k-1},j),$$

onde $\{i,j,i_1,\ldots,i_{k-1}\} \subset \mathcal{S}$ *e* $n, n_i \in \mathbb{N}$ *são tais que*

$$n = \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell.$$

Exemplo 1.1

Considere a CMTD:



e note que $p_6(0,2) > p_3(0,3)\, p_1(3,0)\, p_2(0,2) = p^5\,(1-p)$.

Prova do Corolário 1.1. Considere $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Vamos provar por indução em k que

$$p_{n_1+\cdots+n_k}(i,j) \geq p_{n_1}(i,i_1)\, p_{n_2}(i_1,i_2) \cdots p_{n_{k-1}}(i_{k-2},i_{k-1})\, p_{n_k}(i_{k-1},j),$$

onde $\{i, j, i_1, \ldots, i_{k-1}\} \subset \mathcal{S}$. Se $k = 2$ temos que

$$p_{n_1+n_2}(i,j) = \sum_{r\in\mathcal{S}} p_{n_1}(i,r)p_{n_2}(r,j) \geq p_{n_1}(i,i_1)p_{n_2}(i_1,j),$$

para qualquer $i_1 \in \mathcal{S}$. Suponha o resultado válido para $k-1$. Como

$$p_{n_1+\cdots+n_k}(i,j) = \sum_{r\in\mathcal{S}} p_{n_1+\cdots+n_{k-1}}(i,r)p_{n_k}(r,j)$$

temos que $p_{n_1+\cdots+n_k}(i,j) \geq p_{n_1+\cdots+n_{k-1}}(i,i_{k-1})p_{n_k}(i_{k-1},j)$ para $i_{k-1} \in \mathcal{S}$. Concluímos a prova pela hipótese indutiva e pelo fato que

$$n = n_1 + \cdots + n_k.$$

Recorrência e transiência

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados $\mathcal{S}$. Para $i \in \mathcal{S}$ seja

$$\tau_i := \inf\{n \geq 1 : X_n = i\},$$

com $\tau_i := \infty$ se o infimo não existe. Se

$$P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$$

dizemos que i é um estado recorrente. Se i não é recorrente dizemos que é transiente; isto é, se

$$P(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$$

dizemos que i é transiente.

Lembrete: para cada $n \geq 1$ definimos a variável indicadora

$$I_n := \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = i, \\ 0, & \text{se } X_n \neq i, \end{cases}$$

e observamos que $I(i) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ é o número de visitas do processo ao estado i.

Teorema 1.1

Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados $\mathcal{S}$ e seja $j \in \mathcal{S}$.

1. *Se j é transiente então $P(I(j) < \infty | X_0 = i) = 1$ para todo $i \in \mathcal{S}$.*
2. *Se j é recorrente então $P(I(j) = \infty | X_0 = j) = 1$.*

Prova do Teorema 1.1. Definimos $\beta_{ij} := P(\tau_j < \infty | X_0 = i)$, $i, j \in \mathcal{S}$.

Note que

$$P(I(j) \geq n | X_0 = i) = P(I(j) \geq n | X_0 = i, \tau_j < \infty) P(\tau_j < \infty | X_0 = i)$$

mas, pela propriedade Markoviana temos que

$$P(I(j) \geq n | X_0 = i, \tau_j < \infty) = P(I(j) \geq n - 1 | X_0 = j).$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(I(j) \geq n | X_0 = i) &= \beta_{ij}\, P(I(j) \geq n - 1 | X_0 = j) \\ &= \beta_{ij}\, \{\beta_{jj} P(I(j) \geq n - 2 | X_0 = j)\} \\ &\vdots \\ &= \beta_{ij}\, \beta_{jj}^{n-1} \end{aligned}$$

... continuação da Prova do Teorema 1.1. Como $\{I(j) \geq n\} \searrow$ temos pela continuidade da probabilidade que

$$\lim_{n\to\infty} P(I(j) \geq n | X_0 = i) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{I(j) \geq n\} \middle| X_0 = i \right) = P(I(j) = \infty | X_0 = i).$$

(1) Se j é transiente, então $\beta_{jj} < 1$ e temos que

$$\lim_{n\to\infty} P(I(j) \geq n | X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} \beta_{ij}\, \beta_{jj}^{n-1} = 0.$$

Então, $P(I(j) < \infty | X_0 = i) = 1$.

(2) Se j é recorrente, então $P(I(j) \geq n | X_0 = j) = \beta_{jj}^{n} = 1$ e portanto

$$1 = \lim_{n\to\infty} P(I(j) \geq n | X_0 = j) = P(I(j) = \infty | X_0 = j).$$

Teorema 1.2

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$ *e probabilidades de transição* $p(i,j)$ *para* $i,j\in\mathcal{S}$. *Então*

$$i\in\mathcal{S} \text{ é recorrente se, e somente se, } \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i)=\infty.$$

Prova do Teorema 1.2. Para cada $n \geq 1$ considere a variável indicadora

$$I_n := \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = i, \\ 0, & \text{se } X_n \neq i, \end{cases}$$

e observe que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ é o número de visitas do processo ao estado i.

$(\Rightarrow)$ Suponnha que i é recorrente. Então

$$P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1 \quad \text{e} \quad E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \middle| X_0 = i\right) = \infty.$$

Mas

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \middle| X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(I_n | X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X_n = i | X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i).$$

Prova do Teorema 1.2. ($\Leftarrow$) Para provar a volta suponha que i é transiente. Neste caso

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \Big| X_0 = i \right) \sim Geom(p_i)$$

onde $p_i := P(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$ e portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \Big| X_0 = i \right) = \frac{1}{p_i} < \infty.$$

Algumas definições:

- Dizemos que os estados $i, j \in \mathcal{S}$ estão na mesma classe se existem constantes $n_1 \geq 0$ e $n_2 \geq 0$ tais que

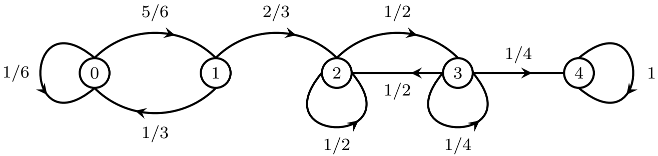
$$p_{n_1}(i,j) > 0 \text{ e } p_{n_2}(j,i) > 0.$$

- Dizemos que uma CMTD é irredutível se todos seus estados pertencem à mesma classe.

Exemplo 1.2

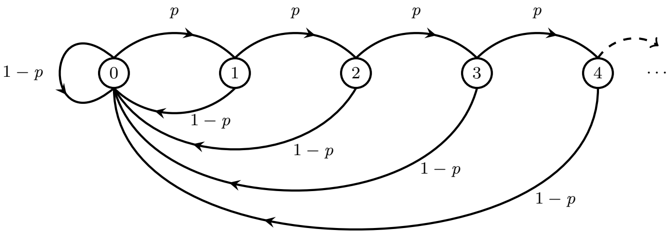
Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma cadeia de Markov com espaço de estados* $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *e matriz de transição:*

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Note que existem três clases: $\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{2, 3\}$ *e* $\mathcal{C}_3 = \{4\}$.

... voltando ao Exemplo 1.1. Note que a CMTD:



é irredutível pois, para qualquer $i \neq j$ temos que:

- $p_{j-i}(i,j) = p^{j-i} > 0$,
- $p_{i+1}(j,i) = (1-p)\,p^{i} > 0$.

Corolário 1.2

Se dois estados i e j estão na mesma classe e o estado i é recorrente, então o estado j é recorrente.

Prova. Se i e j, $i \neq j$, estão na mesma classe então existem $m > 0$ e $n > 0$ tais que

$$p_m(i,j) > 0 \text{ e } p_n(j,i) > 0.$$

Suponha que i é recorrente e note que

$$p_{n+r+m}(j,j) \geq p_n(j,i)\, p_r(i,i)\, p_m(i,j).$$

Logo,

$$\sum_{r=1}^{\infty} p_{n+r+m}(j,j) \geq p_n(j,i)\, p_m(i,j) \sum_{r=1}^{\infty} p_r(i,i) = \infty.$$

somando em r

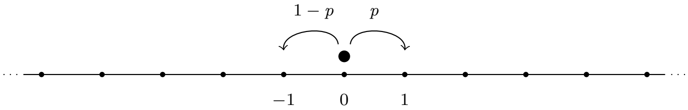
pois i é recorrente

... portanto j é recorrente.

O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ é a cadeia de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\mathbb{Z}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i) = \begin{cases} p, & \text{para } j = i+1, \\ 1-p, & \text{para } j = i-1, \\ 0, & \text{para } j \neq i \pm 1. \end{cases}$$



Teorema 1.3

O Passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ é recorrente se, e somente se, $p = 1/2$.

Prova. Vamos analisar $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i)$. Note que $p_{2n-1}(0,0) = 0$ para $n \geq 1$ enquanto que

$$p_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

De fato, dado $X_0 = 0$, para $X_{2n} = 0$, uma configuração favorável é:

$$\sigma : \begin{array}{cccccccccc} \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \cdots\cdots & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & & & & & & {\scriptstyle 2n-1} & {\scriptstyle 2n} \end{array} \qquad \begin{array}{l} n \text{ à esquerda } (\leftarrow) \\ n \text{ à direita } (\rightarrow) \end{array}$$

Mas há $\binom{2n}{n}$ formas diferentes de obter uma configuração destas e

$$P(\sigma) = p^n(1-p)^n,$$ por independência!

Denotamos $q := 1 - p$. Então

$$p_{2n}(0,0) = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right\} (p\, q)^n$$

e usamos a fórmula de Stirling:

$$n! \sim n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

representando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n\, e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1,$$

para obter

$$p_{2n}(0,0) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

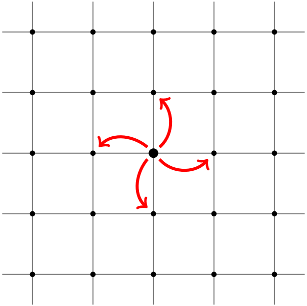
Mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \infty \text{ se, e somente se, } p = \frac{1}{2}.$$

O passeio aleatório simétrico em $\mathbb{Z}^2$

É a cadeia de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ com estados em $\mathbb{Z}^2$ e probabilidades de transição dadas por: para $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2$

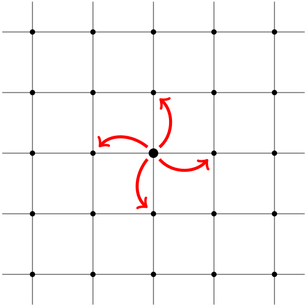
$$p(u,v) = P(Y_{n+1} = v | Y_n = u) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{se } v \in \{(u_1, u_2 \pm 1), (u_1 \pm 1, u_2)\}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



O passeio aleatório simétrico em $\mathbb{Z}^2$

É a cadeia de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ com estados em $\mathbb{Z}^2$ e probabilidades de transição dadas por: para $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$p(u,v) = P(Y_{n+1} = v \mid Y_n = u) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } v \in \{(u_1, u_2 \pm 1), (u_1 \pm 1, u_2)\}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



O passeio aleatório em $\mathbb{Z}^2$

é recorrente.

Denotamos $\mathbf{0} = (0,0)$. Note que $p_{2n-1}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0,\ n \geq 1$, enquanto que

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, (n-i)!\, (n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}.$$

De fato, dado $X_0 = \mathbf{0}$, para $X_{2n} = \mathbf{0}$, uma configuração favorável é:

$$\sigma : \begin{array}{cccccccccc} \leftarrow & \rightarrow & \downarrow & \downarrow & \leftarrow & & \rightarrow & \uparrow & \downarrow & \leftarrow \\ \overline{} & \overline{} & \overline{} & \overline{} & \overline{} & \cdots\cdots & \overline{} & \overline{} & \overline{} & \overline{} \\ 1 & 2 & 3 & & & & & & 2n-1 & 2n \end{array} \qquad \begin{array}{r} i \text{ pulos } \rightarrow \\ i \text{ pulos } \leftarrow \\ n-i \text{ pulos } \uparrow \\ n-i \text{ pulos } \downarrow \end{array}$$

Mas, para cada $i \in \{0, 1 \ldots, n\}$, há

$$\frac{(2n)!}{i!\, i!\, (n-i)!\, (n-i)!}$$

formas diferentes de obter uma configuração destas e $P(\sigma) = (1/4)^{2n}$.

Para encontrar uma aproximação de

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, (n-i)!\, (n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n},$$

note que

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, (n-i)!\, (n-i)!} = \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}^2.$$

Então,

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \binom{2n}{n}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

e pela fórmula de Stirling concluimos que

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \sim \frac{1}{\pi n}.$$

$$\text{Como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \text{ então } \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \infty.$$

O passeio aleatório simétrico em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$

O P.A.S. em $\mathbb{Z}^3$ é a cadeia de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ com estados em $\mathbb{Z}^3$ e probabilidades de transição dadas por: para $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Z}^3$

$$p(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{se } v \in \{(u_1, u_2 \pm 1, u_3), (u_1 \pm 1, u_2, u_3), (u_1, u_2, u_3 \pm 1)\}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sabemos que o P.A.S. em $\mathbb{Z}^3$ é transiente!

Se denotamos $\mathbf{0} = (0,0,0)$, temos que $p_{2n-1}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = 0$, $n \geq 1$ e

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, j!\, j!\, k!\, k!} \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Por outro lado, como

$$\sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \frac{(2n)!}{i!\, i!\, j!\, j!\, k!\, k!} = \binom{2n}{n} \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \binom{n}{i,j,k}^2$$

temos

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \left\{ \binom{n}{i,j,k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \right\}^2.$$

Note que

$$\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=n}} \left\{\binom{n}{i,j,k}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}^2 \leq C_{n,3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \left\{\sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=n}} \binom{n}{i,j,k}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\},$$

máximo dos coeficientes $\qquad = 1$

A soma é igual a um pois no experimento de distribuir ao acaso n bolas distintas em 3 urnas distintas, temos que, para $i, j, k \geq 0$ com $i + j + k = n$, então

$$\binom{n}{i,j,k}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

é a probabilidade de que i, j e k bolas sejam colocadas, resp., na primeira, segunda e terceira urna.

Portanto, conseguimos

$$p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \leq \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} C_{n,3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

Fazendo $n = 3m$, temos que

$$\binom{3m}{i\,j\,k} \leq \binom{3m}{m\,m\,m} \tag{1}$$

para todo i, j, k tal que $i + j + k = 3m$. De fato, fixe i, j, k e sem perda de generalidade suponha que $i < m$ e que $j \geq m + 1$. Note que $i + 1 < j$ e assim:

$$\binom{3m}{i\,j\,k} = \frac{(3m)!}{i!\,j!\,k!} \leq \left\{\frac{j}{i+1}\right\}\left\{\frac{(3m)!}{i!\,j!\,k!}\right\} \leq \frac{(3m)!}{(i+1)!\,(j-1)!\,k!}.$$

Repetidas realizações deste argumento nos leva à desigualdade (1).

Logo,

$$p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \leq \binom{6m}{3m}\left(\frac{1}{2}\right)^{6m}\binom{3m}{m\ m\ m}\left(\frac{1}{3}\right)^{3m} \sim \frac{1}{2(m\pi)^{3/2}}.$$

Como $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{3/2}} < \infty$, então $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) < \infty$. Além disto, note que

$$p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{2} p_{6m-2}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \quad \text{e} \quad p_{6m}(\mathbf{0},\mathbf{0}) \geq \left(\frac{1}{6}\right)^{4} p_{6m-4}(\mathbf{0},\mathbf{0}).$$

Portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(\mathbf{0},\mathbf{0}) < \infty$.

Em geral

Teorema 1.4

O PA simétrico em $\mathbb{Z}^d$ é recorrente se, e somente se, $d \in \{1, 2\}$.

Sobre a prova:

- Para mais detalhes das provas para $d \in \{1, 2, 3\}$ usando os argumentos desta aula ver:
  - Seção I.8 de R. Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser, 1999.
  - ou Seção 1.6 de J. Norris. Markov Chains, Cambridge, 1997.
- Para uma prova para $d \in \{2, 3\}$ usando uma relação entre passeios aleatórios e redes elétricas ver Seção 1.5 de G. Grimmett. Probability on Graphs, Cambridge, 2010.
- Para $d \geq 4$: transiência em $d = 3$ implica transiência para $d \geq 4$.

Classes fechadas

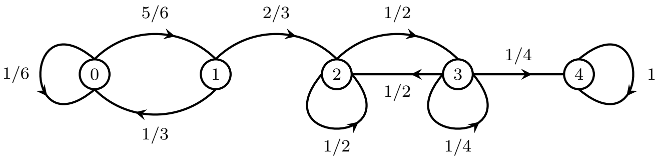
Dizemos que uma classe $\mathcal{C}$ de estados de uma CMTD é fechada se:

$$\text{para todo } i \in \mathcal{C} \text{ e } j \notin \mathcal{C} \text{ vale que } P(\tau_j < \infty | X_0 = i) = 0.$$

Teorema 1.5

Uma classe finita $\mathcal{C}$ é recorrente se, e somente se, é fechada.

Na CMTD do Exemplo 1.2:



temos as três clases:

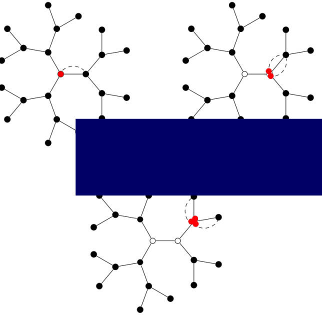
- $\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}$ (aberta)
- $\mathcal{C}_2 = \{2, 3\}$ (aberta)
- $\mathcal{C}_3 = \{4\}$ (fechada)

Discussão

Discutir exemplos.
com $|\mathcal{S}| = \infty$

Referência principal

R. Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser Boston, 1999. Ver também: Uma introdução aos processos estocásticos espaciais, IMPA, 1995.



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org
e-mail: pablo@de.ufpe.br