Lista de exercícios 3 - Cadeias de Markov a tempo discreto

PGE966 - Processos Estocásticos | 1° Semestre de 2021

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

---

1. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\{0,1,2\}$ tem matriz de transição de probabilidades
$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$$
Determine as probabilidades $P(X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 0)$ e $P(X_2 = 1, X_3 = 1 | X_0 = 0)$.

2. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\{0,1,2\}$ tem matriz de transição de probabilidades
$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Determine as probabilidades $P(X_2 = 2, X_3 = 1 | X_0 = 0)$ e $P(X_3 = 2 | X_0 = 0)$.

3. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\{0,1,2\}$ tem matriz de transição de probabilidades
$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$
Determine as probabilidades $P(X_0 = 2, X_2 = 1, X_4 = 2)$ e $P(X_2 = 1 | X_0 = 1)$.

4. Os físicos Paul e Tatyana Ehrenfest consideram um modelo conceitual para o movimento de moléculas no qual M moléculas estavam distribuídas entre 2 urnas. Em cada instante de tempo uma das moléculas era escolhida aleatóriamente, removida de sua urna e colocada na outra. Se X_n representa o número de moléculas na primeira urna imediatamente após a n-ésima mudança então $(X_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov. Escreva as probabilidades de transição desta cadeia. Justifique.

5. Suponha que em um grupo de 6 pessoas está subdividido em ignorantes (pessoas que não sabem da informação) e informantes (pessoas que sabem da informação). Suponha que em cada instante de tempo ocorre uma interação entre um par destas pessoas, e que cada par tem a mesma probabilidade de interagir. Se uma das pessoas do par é um informante e a outra é um ignorante, o informante conta a informação com probabilidade p e neste caso o ignorante vira informante. Em qualquer outra situação nada acontece. Seja X_n o número de informantes no grupo no n-ésimo instante de tempo. Determine a matriz de probabilidades de transição da cadeia $(X_n)_{n\geq 0}$.

6. Dada uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\mathcal{S}$, mostre que para todo $m, n, r \geq 0$, com $r < n < m$, e todo $i_m, i_n, i_r \in \mathcal{S}$, vale que $P(X_m = i_m | X_n = i_n, X_r = i_r) = P(X_m = i_m | X_n = i_n)$.

7. Considere as seguintes cadeias de Markov:
   (a) O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$;
   (b) o passeio aleatório no círculo (5 estados);
   (c) as cadeias consideradas nos exercícios 1 a 4.

   Encontre uma função $f(x,u)$ tal que para todo $n \geq 1$ podemos escrever $X_n = f(X_{n-1}, U_n)$ onde $\{U_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência i.i.d. com $U_i \sim U(0,1)$.

8. Dada uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\mathcal{S}$, mostre que para todo $m, n \geq 0$, com $n < m$, e todo $i, j, k \in \mathcal{S}$, vale que $p_m(i,j) \geq p_n(i,k) p_{m-n}(k,j)$.

9. (Revisão) Enuncie e prove o Teorema da Convergência Monótona[1]. Deduza que se $(X_n)_{\geq 0}$ é uma sequência de variáveis aleatórias não-negativas então $E\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n)$.

[1] Ver por exemplo Teorema 3.3 do livro Probabilidade: um curso de nível intermediário, de Barry James. 3.ed. IMPA, 2013.