

Lista de exercícios 5

PGE950 - Probabilidade | PPGE - UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

1° Semestre de 2020

Exercícios:

- Uma moeda honesta é lançada 4 vezes. Determine a função de probabilidade das seguintes variáveis aleatórias:
 - $X =$ a diferença entre o número de caras e coroas obtido nos 4 lançamentos;
 - $Y =$ o total de caras obtido nos 4 lançamentos;
 - $Z =$ o produto entre o número de caras e coroas obtido nos 3 primeiros lançamentos.
- Três dados honestos são jogados simultaneamente. Seja Y a soma dos resultados dos três dados, determine:
 - a função de probabilidade de Y ;
 - $P(Y \geq 6)$.
- Seja X uma variável aleatória e seja $x_n \searrow y$. Mostre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \{X \leq y\}$.
- Seja X uma variável aleatória e seja $x_n \nearrow +\infty$. Mostre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \Omega$.
- Em um labirinto em T (ver Fig. 1), um animal de laboratório tem duas opções: ele pode ir para a esquerda (local A) e receber comida, ou ele pode ir para a direita (local B) e receber um choque elétrico suave. Suponha que antes de iniciar o experimento (na primeira tentativa) o animal tem a mesma probabilidade de ir tanto para a esquerda quanto para a direita. Por outro lado, após o animal receber comida em uma tentativa particular, a probabilidade dele retornar para A ou de ir para B na tentativa seguinte é de 0,6 e 0,4, respectivamente. No entanto, se em uma tentativa particular o animal recebe um choque elétrico então na tentativa seguinte ele irá para A com probabilidade 0,8 e para B com probabilidade 0,2. Considere, para $i \in \{1, 2\}$, as variáveis aleatórias:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o animal vira a esquerda na } i\text{-ésima tentativa,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

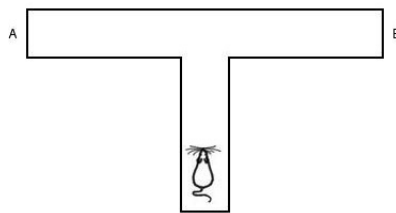


Figura 1: Labirinto em T . $A =$ comida. $B =$ choque.

Determine a função de probabilidade da variável aleatória X_i , $i \in \{1, 2\}$.

- Seja X uma variável aleatória e F sua função de distribuição. Mostre que $\Lambda_n = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x-) > \frac{1}{n}\}$, tem no máximo n elementos.
- Suponha que a função de distribuição de uma variável aleatória X seja dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

(a) Determine a função de probabilidade de X .

(b) Calcule $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2}\right)$.

8. Suponha que a função de distribuição de uma variável aleatória X seja dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0,25, & -2 \leq x < -1 \\ 0,33, & -1 \leq x < 1 \\ 0,75, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

(a) Determine a função de probabilidade de X .

(b) Calcule $P(-1,25 < X < 2)$.

9. Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição F_X e função densidade f_X . Determine a função densidade das seguintes variáveis aleatórias:

(a) $Y = aX + b$, com $a \neq 0$ e b duas constantes;

(b) $Y = e^X$;

(c) $Y = \sqrt{X}$.

10. Seja X uma variável aleatória com função densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} c2e^{-x/3}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Determine:

(a) o valor de c ;

(b) a função de distribuição de X ;

(c) $P(X > 10)$.

11. (Ex. 5.3, p. 274, Ross¹) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3), & 0 < x < \frac{5}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Poderia f ser uma função densidade de probabilidade? Caso positivo, determine o valor de c . Repita considerando que a função $f(x)$ seja dada por:

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^2), & 0 < x < \frac{5}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

12. (Ex. 2, p. 71, Grinstead e Snell) Suponha que um número real X é escolhido do intervalo $[2, 10]$ com uma função densidade da forma $f(x) = cx$, onde c é uma constante. Determine:

(a) o valor de c ;

(b) $P(E)$, onde $E = [a, b]$ é um subintervalo de $[2, 10]$;

(c) $P(X > 5)$, $P(X < 7)$, e $P(X^2 - 12X + 35 > 0)$.

13. (Ex. 3, p. 71, Grinstead e Snell) Resolva o Exercício 12, mas supondo $f(x) = c/x$.

ENTREGAR

os exercícios 3, 6, 8 e 12 por e-mail ou por WhatsApp, escrito à mão, até o dia 10/07.

¹Ross. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações. 8a ed., Bookman, 2010.