Aula 13: Distribuição de funções de vetores aleatórios

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Distribuição de funções de vetores aleatórios.
- Distribuição conjunta de funções de vetores aleatórios.
- Método do Jacobiano.

Perguntas de interesse

Dadas variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e uma função $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, qual a distribuição de

$$Y := g(X_1, \ldots, X_n)?$$

E dada uma segunda função $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, e a variável

$$Z := h(X_1, \ldots, X_n),$$

qual a distribuição conjunta de Y e Z?

- No que segue vamos considerar funções nas que sempre vale

$$g^{-1}(B) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(x_1, \dots, x_n) \in B\} \in \mathcal{B}^n,$$

  para todo $B \in \mathcal{B}$ (i.e., funções mensuráveis com relação a $\mathcal{B}$).

- Isto garante que

$$Y := g(X_1, \dots, X_n),$$

  é uma variável aleatória.

Observação!

Note que $F_Y(a) = P(g(X_1, \dots, X_n) \leq a) = P((X_1, \dots, X_n) \in g^{-1}((-\infty, a]))$.

Exemplo 13.1

Se $X \sim U[0,1]$ *então* $Y = -\log X \sim Exp(1)$. *De fato, note que*

$$X \in (0,1) \text{ se, e somente se, } Y \in (0,\infty),$$

em que $P(X \in (0,1)) = 1$. *Então, dado* $a \in (0,\infty)$ *temos que*

$$F_Y(a) = P(Y \leq a) = P(-\log X \leq a) = P(X \geq e^{-a}) = 1 - e^{-a}.$$

Como $F_Y(a) = 0$ *se* $a \in (-\infty, 0]$ *concluímos o resultado.*

Exemplo 13.2

Sejam $X \sim Exp(\lambda_1)$ *e* $Y \sim Exp(\lambda_2)$ *independentes. A densidade da variável aleatória*

$$U = \frac{X}{Y},$$

pode ser determinada notando que, para $a > 0$ *(se* $a \leq 0$ *então* $P(U \leq a) = 0$*):*

$$\begin{aligned}
F_U(a) &= P(X \leq aY) \\
&= \int_0^\infty \int_0^{ay} \left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\right)\left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\right) dx\, dy \\
&= \int_0^\infty \left[\left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\right) \int_0^{ay} \left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\right) dx\right] dy \\
&= \int_0^\infty \left[\left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\right) F_X(ay)\right] dy
\end{aligned}$$

... continuação do Exemplo 13.2. Como $F_X(ay) = 1 - e^{-\lambda_1 ay}$, temos

$$\begin{aligned} F_U(a) &= \int_0^\infty \left[\left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\right)\left(1 - e^{-\lambda_1 ay}\right)\right] dy, \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\right) dy}_{=1} - \underbrace{\int_0^\infty \left(\lambda_2 e^{-(\lambda_1 a + \lambda_2) y}\right) dy}_{=\lambda_2/(\lambda_1 a + \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Então $F_U(a) = 1 - \dfrac{\lambda_2}{(\lambda_1 a + \lambda_2)}$ e portanto

$$f_U(a) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 a + \lambda_2)^2}, & \text{se } a > 0, \\ 0, & \text{se } a \leq 0. \end{cases}$$

Proposição 13.1

Se X e Y têm densidade conjunta $f(x, y)$, então

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a - t, t)dt.$$

Demonstração. Como $F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} f(x, y)\, dx\, dy$, fazendo $s = x + y$ e $t = y$ temos

$$F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a} f(s - t, t)\, ds\, dt = \int_{-\infty}^{a} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s - t, t)\, dt \right\} ds,$$

e portanto $f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a - t, t)dt.$

Proposição 13.2

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes, então as variáveis aleatórias $g_1(X_1), g_2(X_2), \ldots, g_n(X_n)$ também são independentes.

Demonstração. Seja $Y_i = g_i(X_i)$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, então

$$
\begin{aligned}
F_{Y_1,\ldots,Y_n}(a_1, \ldots, a_n) &= P(g_1(X_1) \leq a_1, \ldots, g_n(X_n) \leq a_n) \\
&= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in g_i^{-1}(-\infty, a_i]\}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \in g_i^{-1}(-\infty, a_i]\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P\left(g_i(X_i) \leq a_i\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} F_{Y_i}(a_i)
\end{aligned}
$$

Observação!

Vale para funções de famílias disjuntas das X_i's

Exemplo 13.3

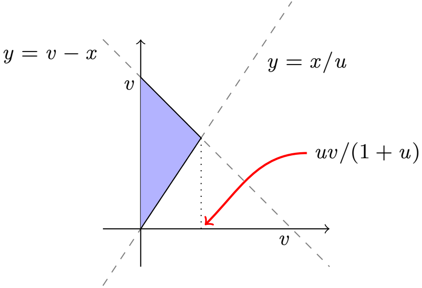
Sejam $X \sim Exp(1)$ *e* $Y \sim Exp(1)$ *independentes. Podemos provar que*

$$U = \frac{X}{Y}, \ e \ V = X + Y,$$

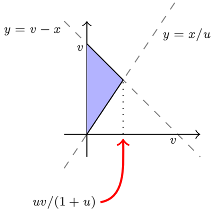
são independentes e encontrar as suas distribuições. Se $u > 0$ *e* $v > 0$

$$F_{U,V}(u,v) = P(U \leq u, V \leq v) = P((X,Y) \in \mathcal{C}_{u,v}),$$

onde $\mathcal{C}_{u,v} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x \leq uy, x + y \leq v\}$*:*



... continuação do Exemplo 13.3. Então,



$$
\begin{aligned}
F_{U,V}(u,v) &= P((X,Y) \in \mathcal{C}_{u,v}) \\
&= \iint_{\mathcal{C}_{u,v}} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^{uv/(1+u)} \int_{x/u}^{v-x} e^{-(x+y)}\, dy\, dx \\
&= \int_0^{uv/(1+u)} \left(e^{-x(1+u)/u} - e^{-v} \right) dx \\
&= \underbrace{\left(\frac{u}{1+u} \right)}_{F_1(u)} \underbrace{\left(1 - e^{-v} - ve^{-v} \right)}_{F_2(v)} .
\end{aligned}
$$

... continuação do Exemplo 13.3. Isto é, conseguimos escrever

$$F_{U,V}(u,v) = F_1(u)F_2(v),$$

para $u > 0$ e $v > 0$. Se $u \leq 0$ ou $v \leq 0$ temos que $F_{U,V}(u,v) = 0$. Como

$$\lim_{u\to\infty} F_1(u) = 1, \text{ e que } \lim_{v\to\infty} F_2(v) = 1,$$

concluímos que U e V são independentes e as suas distribuições são:

$$F_U(u) = \begin{cases} \dfrac{u}{1+u}, & \text{se } u > 0, \\ 0, & \text{se } u \leq 0 \end{cases}$$

e

$$F_V(v) = \begin{cases} 1 - e^{-v} - ve^{-v}, & \text{se } v > 0, \\ 0, & \text{se } v \leq 0. \end{cases}$$

No exemplo anterior usamos o seguinte resultado:

Proposição 13.3

Dadas n variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$, se existem funções $F_1, \ldots, F_n$ tais que

$$\lim_{x \to \infty} F_i(x) = 1, \ \textit{para todo } i \in \{1, \ldots, n\}$$

e

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i), \ \textit{pata todo } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

então $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e $F_i = F_{X_i}$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração. Ver Proposição 2.4 do livro de Barry James.

O método do Jacobiano

- Sejam $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}$ duas regiões abertas de $\mathbb{R}^n$ e $g : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}$ bijetora tal que $g(x_1, \ldots, x_n) = (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n))$. Existe $h = g^{-1}$ em $\mathcal{A}$ tal que se $y_i := g_i(x_1, \ldots, x_n)$, então

$$x_i = h_i(y_1, \ldots, y_n), \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

- Para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, as derivadas parciais

$$\frac{\partial h_i(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}, \text{ existem e são contínuas em } \mathcal{A}$$

- O Jacobiano $J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \neq 0.$

O método do Jacobiano

Então, para qualquer $A \subset \mathcal{A}_0$ temos que

$$\int \cdots \int_A f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \int \cdots \int_{g(A)} f(h_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n(y_1, \ldots, y_n))\, |J(\mathbf{x}, \mathbf{y})|\, dy_1 \cdots dy_n,$$

para qualquer função f integrável em $A \subset \mathcal{A}_0$.

O método do Jacobiano

Considere $g : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}$ como antes e considere $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias com densidade conjunta $f(x_1, \ldots, x_n)$ tal que

$$P((X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{A}_0) = 1.$$

Se $Y_1, \ldots, Y_n$ são variáveis aleatórias tais que

$$Y_i = g_i(X_1, \ldots, X_n), \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}$$

então

$$f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = f(h_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n(y_1, \ldots, y_n)) \, |J(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$$

se $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$, e $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = 0$ se $\mathbf{y} \notin \mathcal{A}$.

Observação!

Quando $n = 1$ o método do Jacobiano reduz-se para

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)|, & se\ y \in \mathcal{A}, \\ 0, & se\ y \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Usando o método do Jacobiano para o Exemplo 13.1. Lembre que $X \sim U[0,1]$ e que $Y = -\log X$. Então, $g : (0,1) \longrightarrow (0,\infty)$ com

$$g(x) = -\log x, \quad g^{-1}(y) = e^{-y}, \quad (g^{-1})'(y) = -e^{-y}.$$

Como

$$f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)| = f_X(e^{-y})|-e^{-y}| = e^{-y}, \text{ se } y \in (0,\infty)$$

temos que $Y \sim Exp(1)$.

Exemplo 13.3 através do método do Jacobiano. Sejam $X \sim Exp(1)$ e $Y \sim Exp(1)$ independentes. Queremos verificar que

$$U = \frac{X}{Y}, \text{ e } V = X + Y,$$

são independentes e queremos encontrar as suas distribuições. Neste caso, $g : (0, \infty) \times (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) \times (0, \infty)$ é tal que $g = (g_1, g_2)$ com

$$u = g_1(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad v = g_2(x, y) = x + y.$$

Como

$$x = h_1(u, v) = \frac{uv}{1 + u} \quad \text{e} \quad y = h_2(u, v) = \frac{v}{1 + u},$$

temos que $J((x, y), (u, v)) = \dfrac{v}{(1 + u)^2}$.

... continuação do Exemplo 13.3 (método do Jacobiano). Para $(u, v) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ temos

$$f_{U,V}(u, v) = f(h_1(u, v), h_2(u, v)) \frac{v}{(1+u)^2} = e^{-(h_1(u,v)+h_2(u,v))} \frac{v}{(1+u)^2}$$

(caso contrário $f_{U,V}(u, v) = 0$). Isto é,

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+u)^2} \cdot ve^{-v}, & \text{se } u > 0, v > 0, \\ 0, & \text{se } u \leq 0, v \leq 0. \end{cases}$$

Portanto, U e V são independentes com densidades dadas por

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+u)^2}, & \text{se } u > 0, \\ 0, & \text{se } u \leq 0. \end{cases} \qquad f_V(v) = \begin{cases} ve^{-v}, & \text{se } v > 0, \\ 0, & \text{se } v \leq 0. \end{cases}$$

Bom estudo!