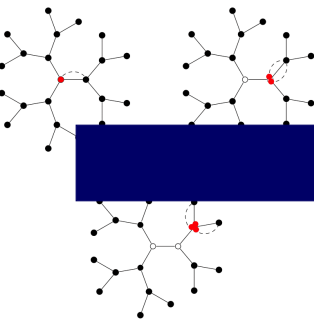


ET658 - Processos Estocásticos para Atuária

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



Processos de Poisson

Prof. Pablo M. Rodriguez

<https://www.pablo-rodriguez.org/et658-processos-estocasticos>



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

CCEN

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
E DA NATUREZA

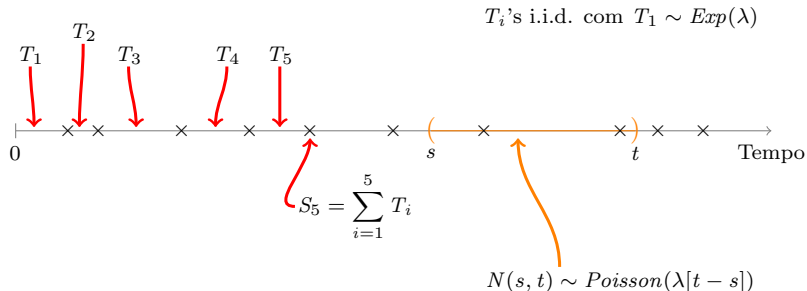
Conteúdo da Aula 12

- ▶ Processo de Poisson
- ▶ Problemas e exercícios



Processo de Poisson de parâmetro λ

Lembre que:



Observação!

Se T_1, T_2, \dots, T_n são i.i.d. com $T_1 \sim Exp(\lambda)$ então $\sum_{i=1}^n T_i \sim Gama(n, \lambda)$.



Processo de contagem

Um processo estocástico a tempo contínuo $(N(t))_{t \geq 0}$ tal que

$N(t)$ é o # de eventos de interesse que ocorrem até o instante t ,

chama-se **processo de contagem**. Tal processo satisfaz:

- ▶ $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, para todo $t \geq 0$;
- ▶ $N(s) \leq N(t)$ se $s < t$;
- ▶ Para $s < t$,

$$N(s, t) := N(t) - N(s)$$

é igual ao # de eventos que ocorrem na janela de tempo $(s, t]$.



Incrementos

Dizemos que o processo $(N(t))_{t \geq 0}$ tem:

- ▶ **incrementos independentes** se

$N(I_1)$ e $N(I_2)$ são independentes

para intervalos disjuntos I_1 e I_2 ; i.e., $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

- ▶ **incrementos estacionários** se

$N(s, s + t) = N(0, t)$ em distribuição,

para quaisquer $s, t \geq 0$.



Processo de Poisson

Definição 12.1

O processo de contagem $(N(t))_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson de parâmetro λ , $\lambda > 0$, se:

- i. $N(0) = 0$;
- ii. o processo tem incrementos independentes;
- iii. para todo $s, t \geq 0$, com $s < t$,

$$N(s, t) \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s)).$$

Denotamos $(N(t))_{t \geq 0} \sim P.P.(\lambda)$.



Processo de Poisson

Definição 12.2

O processo de contagem $(N(t))_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson de parâmetro λ , $\lambda > 0$, se:

- i. $N(0) = 0$;
- ii. o processo tem incrementos independentes e estacionários;
- iii. $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$;
- iv. $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

Observação

Uma função f é $o(h)$ se $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

As Definições 12.1 e 12.2 são equivalentes (ver Ross, p. 315).



Propriedades importantes

Proposição 12.1

Os tempos entre chegadas T_1, T_2, \dots são v.a. i.i.d. com $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Proposição 12.2

Dado que $N(t) = n$, os n tempos de chegada S_1, S_2, \dots, S_n têm a mesma distribuição que as estatísticas de ordem de n v.a. i.i.d. com distribuição comum uniforme no intervalo $(0, t)$.



Exemplo da aula passada: Suponha as ocorrências de um evento de acordo a um $P.P.(10)$. Determine $P(N(0, 1) = 2 | N(0, 5) = 5)$.

Note que, dado que $N(0, 5) = 5$, os cinco pontos estão distribuídos como as estatísticas de ordem de 5 v.a.

$$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$$

i.i.d. com $U_1 \sim \text{Uniforme}(0, 5)$. Isto é, se $0 \leq a < b \leq 5$, então

$$P(U_1 \in (a, b)) = \frac{(b - a)}{5}.$$

Assim, dado que $N(0, 5) = 5$, temos que

$$N(0, 1) = \sum_{i=1}^5 I_{\{U_i \in (0, 1]\}} \sim \text{Binomial}(5, 1/5),$$

pois $I_{\{U_i \in (0, 1]\}} \sim \text{Bernoulli}(1/5)$. Logo,

$$P(N(0, 1) = 2 | N(0, 5) = 5) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^3.$$



Problemas

Problema 1. Um teste é realizado com 100 itens funcionando simultaneamente. Suponha que os tempos de vida individuais são variáveis aleatórias independentes com média 200 horas. O teste é finalizado quando ocorrem 5 falhas. Se T é o tempo de duração do teste, encontre $E(T)$.

Problema 2. Seja $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Poisson de parâmetro 2. Calcule:

1. $E((N(2, 7))^2)$;
2. $P(N(2, 5) = 7, N(7, 10) = 2 \mid N(0, 10) = 10)$;
3. $E(N(2, 7)N(2, 9))$.

Problema 3. Fregueses chegam a uma loja de acordo com um processo de Poisson de parâmetro 5 fregueses por hora. Dado que 12 fregueses chegaram durante as duas primeiras horas de abertura, qual é a probabilidade condicional de que cinco fregueses chegaram durante a primeira hora?



Referências



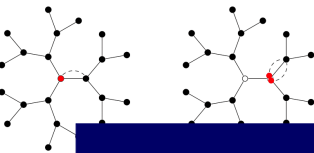
Sheldon M. Ross. Introduction to Probability Models. 10th ed.
Academic Press. 2010. (Capítulo 5)



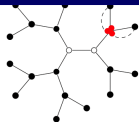
UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

CCEN

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
E DA NATUREZA



Bom estudo!



Prof. Pablo M. Rodriguez
<https://www.pablo-rodriguez.org>
e-mail: pablo@de.ufpe.br



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

CCEN

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
E DA NATUREZA