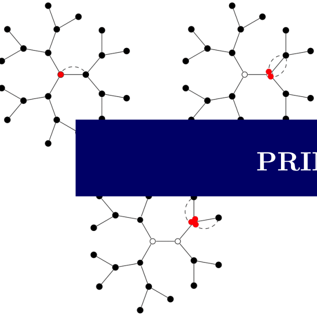
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



PRINCÍPIOS BÁSICOS DE CONTAGEM

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 2

- Princípio aditivo;
- Princípio multiplicativo;
- Princípio de inclusão-exclusão.

Introdução

Contar os objetos de um conjunto pode não ser tarefa fácil!

A Análise Combinatória (ou simplesmente combinatória) trata, dentre outros temas, de estabelecer formas de organizar processos de contagem, de modo a simplificá-los. Para isso, a combinatória oferece diversas ferramentas, quase todas baseadas em alguns princípios simples.

O que é contar?

Se um conjunto A contém n objetos, associamos a cada objeto um, e apenas um, número do conjunto

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Matematicamente, contar os elementos do conjunto A é estabelecer uma correspondência biunívoca (bijetora) entre os elementos de A e os elementos de um subconjunto de $\mathbb{N}$ da forma $I_n := \{1, 2, \ldots, n\}$.

Em outras palavras, é fazer corresponder a cada elemento de A um único elemento de I_n, sem que dois elementos de A sejam associados a um mesmo número em I_n, e sem que reste nenhum elemento em A ou em I_n.

Quando isto é possível dizemos que A é finito e tem n elementos.

O que é contar?

Mas apenas enumerar elementos de um conjunto pode ser um processo tedioso e, na prática, impossível.

Quando queremos descobrir o total de pratos que temos em casa podemos, em geral, simplesmente enumerá-los e assim descobrir. Mas se precisarmos calcular o total de maneiras que podemos organizar 1200 alunos em turmas de 45 alunos cada, listar cada possibilidade para posteriormente contar é um trabalho bastante mais complicado.

Por essa razão é importante conhecer ao menos algumas técnicas básicas que nos ajudem a atacar tais problemas.

As técnicas que abordaremos aqui são todas baseadas em dois princípios básicos e simples. Mas antes de enunciá-los apresentaremos dois problemas que os ilustram.

Princípios básicos de contagem

Exemplo 2.1

No próximo sábado teremos, às 20h, as lives L_1, L_2 e L_3. No mesmo horário teremos as entrevistas E_1 e E_2. De quantas formas poderemos nos programar para assistir a uma destas atividades?

Como todas as transmissões são no mesmo horário só podemos assistir a uma das 3 lives ***ou*** *a uma das 2 entrevistas.*

Assim, ao todo, poderemos nos programar de $2 + 3 = 5$ formas para assistir a alguma destas atividades.

Princípio básicos de contagem

Exemplo 2.2

No próximo sábado teremos, às 18h, as entrevistas E_1 e E_2 no Youtube e, às 20h, as lives L_1, L_2 e L_3 no Instagram. De quantas formas poderemos nos programar para assistir uma entrevista e uma live?

Com esta grade de horários é possível que assistamos uma entrevista e uma live. Assim, para nos programar devemos primeiro escolher uma entrevista, e depois uma live, como ilustrado na tabela abaixo.

	Entrevista	***Live***
1	E_1	L_1
2	E_1	L_2
3	E_1	L_3
4	E_2	L_1
5	E_2	L_2
6	E_2	L_3

Note que para cada uma das 2 opções de entrevista temos 3 opções de live. Assim poderemos nos programar de $2 \cdot 3 = 6$ *maneiras distintas!*

Princípio aditivo

O Exemplo 2.1 ilustra o chamado **princípio aditivo**, que podemos enunciar da seguinte maneira:

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Observação

Lembre que dois conjuntos A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.

Princípio aditivo

Voltando ao Exemplo 2.1, vemos que é possível identificar dois conjuntos:

- $A = \{x | x \text{ é uma entrevista}\} = \{E_1, E_2\}$.
- $B = \{x | x \text{ é uma live}\} = \{L_1, L_2, L_3\}$.

Logo,

$$A \cup B = \{x | x \text{ é uma entrevista } \textbf{ou} \ x \text{ é uma live}\}.$$

Uma vez que os conjuntos A e B não possuem elementos em comum, usando a princípio aditivo podemos afirmar que $A \cup B$ tem 5 elementos.

Princípio multiplicativo

Já Exemplo 2.2 ilustra o chamado **princípio multiplicativo**, que pode ser enunciado da seguinte maneira:

Se uma <u>decisão</u> d_1 <u>pode ser tomada de x maneiras</u> e se, uma vez tomada a decisão d_1, a <u>decisão</u> d_2 <u>puder ser tomada de y maneiras</u>, então o total de maneiras de se tomar as decisões d_1 e d_2 em sequência é $x \cdot y$.

Observação: Na linguagem da teoria dos conjuntos, se o conjunto D_1 tem x elementos e o conjunto D_2 tem y elementos então $D_1 \times D_2$, dos pares ordenados (a, b) em que $a \in D_1$ e $b \in D_2$, tem xy elementos.

Princípio multiplicativo

Voltemos ao Exemplo 2.2, onde temos duas decisões a tomar:

- $d_1 :=$ assistir a entrevista E_1 ou E_2.
- $d_2 :=$ assistir a live L_1, L_2 ou L_3.

A decisão d_1 pode ser tomada de 2 formas e, feita a escolha, a decisão d_2 pode ser tomada de 3 formas. Com isso, usando o princípio multiplicativo, a sequência de decisões d_1 e d_2 podem ser tomadas de $2 \times 3 = 6$ maneiras distintas.

Princípios básicos de contagem

Exemplo 2.3

Considere dois dados: ℓ_1 e ℓ_2. Lançamos ℓ_1 e anotamos o resultado, depois lançamos ℓ_2 e anotamos o resultado.

1. *Quantos pares de números podemos obter desta forma?*
   - D_i : *resultado de lançar ℓ_i (isto é 1, 2, 3, 4, 5 ou 6), para* $i = 1, 2$.

   Como D_1 e D_2 podem ter 6 resultados diferentes então a quantidade de pares possíveis é $6 \times 6 = 36$.
2. *Quantos os pares de números diferentes?*
   - D_1 :*resultados ao lançar ℓ_1*
   - D_2 :*resultados do lançamente de ℓ_2, distintos do resultado em D_1*

   Observe que D_1 possui 6 resultados possíveis, e fixada o valor para D_1 temos 5 resultados possíveis para D_2. Com isso, pelo princípio multiplicativo, temos $6 \cdot 5 = 30$ *resultados possíveis.*

Princípios básicos de contagem

Observação: É interessante observar que as decisões possíveis no segundo passo são distintas para cada valor escolhido em D_1.

Se, por exemplo, o resultado do primeiro dado for 1, as escolhas possíveis para o segundo dado são $2, 3, 4, 5$ ou 6, mas se a escolha para o primeiro dado for 4, os valores possíveis são $1, 2, 3, 5$ ou 6. Mas como o total de possibilidades para a decisão D_2 é sempre 5, independente de que escolha tenhamos feito em D_1, o princípio multiplicativo ainda se aplica.

Princípios básicos de contagem

O princípio multiplicativo pode-se escrever de forma mais geral:

Se r experimentos são tais que o primeiro tem n_1 resultados possíveis; e se, para cada um desses n_1 resultados houver n_2 resultados possíveis para o segundo experimento; e se, para cada um dos possíveis resultados dos dois primeiros experimentos houver n_3 resultados possíveis para o terceiro experimento; e se ..., então haverá um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis para os r experimentos.

Princípios básicos de contagem

Observe que na formulação da generalização do Princípio Multiplicativo usamos as expressões experimento e número de resultados possíveis, enquanto na formulação inicial do Princípio Multiplicativo usamos as expressões decisão e número de maneiras de tomar a decisão. Isto é um problema?

Escreva o principio Multiplicativo usando as expressões **experimento** e **número de resultados possíveis**.

Exemplo 2.4

Quantos divisores naturais possui o número 360? Quantos deles são pares?

A fatoração de 360 *como produto de potências de números primos é* $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$*. Em geral, os divisores de 360 são da forma* $2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3}$*, onde* $\alpha_1 \in \{0,1,2,3\}$*,* $\alpha_2 \in \{0,1,2\}$ *e* $\alpha_3 \in \{0,1\}$*. Assim, teremos 3 decisões a tomar*

$$d_i : \textit{valor de } \alpha_i, \textit{ com } i \in \{1,2,3\}.$$

Pelo princípio multiplicativo 360 *tem* $4 \times 3 \times 2 = 24$ *divisores naturais. Para a segunda questão é só observar que para que um divisor* 360 *seja par o valor de* α_1 *não pode ser* 0*. Assim o total é de* $3 \times 3 \times 2 = 18$ *divisores pares.*

Princípios básicos de contagem

Exemplo 2.5

Quantos números naturais de 4 algarismos, que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?

Temos as seguintes opções para cada algarismo:

- *Último algarismo* $\longrightarrow$ *1 modo (tem que ser 5);*
- *Primeiro algarismo* $\longrightarrow$ *3 modos (não pode ser 5);*
- *Segundo algarismo* $\longrightarrow$ *4 modos;*
- *Tercer algarismo;* $\longrightarrow$ *4 modos.*

Desta forma existem $1 \times 3 \times 4 \times 4 = 48$ *números com as características requeridas.*

Princípios básicos de contagem

Exemplo 2.6

Quantos números naturais pares com 3 algarismos distintos podemos escrever?

Nesta situação temos:

- *Último algarismo* $\longrightarrow$ 5 *modos* $(0, 2, 4, 6$ *ou* $8)$;
- $$\textit{Primeiro algarismo} \longrightarrow \begin{cases} 9 \textit{ modos}, & \textit{se zero esta na última casa;} \\ 8 \textit{ modos}\ , & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que não podemos usar o princípio multiplicativo diretamente! Isso por que o total de escolhas para o primeiro algarismo depende de que escolha fizemos para o último!

Para resolver este problema veremos a seguir três opções.

Princípios básicos de contagem

Continuação do Exemplo 2.6. Quantos números naturais pares com 3 algarismos distintos podemos escrever?

Alternativa 1: Dividir o problema em casos.

A_i: i-ésimo algarismo.

- Números que têm zero como último algarismo:
  neste caso teremos $9 \times 8 \times 1 = 72$ números. Explique!

A_1	A_2	A_3
9	8	1

- Números que não têm zero como último algarismo:
  a quantidade destes números é $8 \times 8 \times 4 = 256$. Porque?

A_1	A_2	A_3
8	8	4

Assim temos em total $72 + 256 = 328$ números (porque podemos usar aqui o Princípio Aditivo?).

Princípios básicos de contagem

Continuação do Exemplo 2.6. Quantos números naturais pares com 3 algarismos distintos podemos escrever?

Alternativa 2: Ignorar uma das restrições.
Se esquecermos o fato de que de zero não pode ser o primeiro algarismo teríamos $9 \times 8 \times 5 = 360$ números. Explique!

A_1	A_2	A_3
9	8	5

Desta quantidade teremos que descontar os números que começam por zero. Fixando o 0 (zero) no primeiro algarismo, sobram 4 opções para o último (2,4,6 ou 8), e em seguida apenas 8 para o algarismo do meio. Isso nos dá $1 \times 8 \times 4 = 32$.

A_1	A_2	A_3
1	8	4

Assim temos um total de $360 - 32 = 328$ números.

Princípios básicos de contagem

Continuação do Exemplo 2.6. Quantos números naturais pares com três algarismos distintos podemos escrever?

Alternativa 3: Resolver o problema <u>complementar</u>.

- Calculamos todos os números de três algarismos diferentes que são <u>ímpares</u> (isto é bem mais simples de encontrar!).
  Esta quantidade é $\underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$.

A_1	A_2	A_3

- Os números de três algarismos diferentes são
  $\underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$.

A_1	A_2	A_3

Assim em total temos $\underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} = 328$ números.

Princípio de inclusão e exclusão

O princípio aditivo fala sobre a quantidade de elementos da união de conjuntos que não tem elementos em comum, mas o que acontece quando a interseção for não vazia? Vamos ilustrar isto com o seguinte exemplo.

Princípio de inclusão e exclusão

Exemplo 3.1

Numa aula de 30 alunos, 14 falam inglês, 5 falam espanhol e 3 falam inglês e espanhol. Quantos alunos falam apenas uma língua, dentre inglês e espanhol?

Se definirmos os conjuntos

$$E = \{x : x \textit{ fala espanhol}\} \textit{ e } I = \{x : x \textit{ fala inglês}\}$$

a resposta seria o número de elementos de $E \cup I$*. Se somarmos o número de elementos de* E *e* I*, teremos contado duas vezes os elementos que estão na interseção, isto é, aqueles alunos que falam inglês e espanhol. Logo a resposta correta é*

$$|E| + |I| - |E \cap I| = 14 + 5 - 3.$$

Princípio de inclusão e exclusão

Sejam A e B dois conjuntos finitos. Então o número de elementos de $A \cup B$ é dado por

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Este princípio pode ser generalizado para um número finito de conjuntos como veremos a seguir.

Princípio de inclusão e exclusão

Considere 3 conjuntos A_1, A_2 e A_3. Neste caso podemos dizer que temos 3 tipos de elementos:

- Aqueles que estão em apenas 1 dos 3 conjuntos;
- Aqueles que estão em 2 dos 3 conjuntos;
- Aqueles que estão nos 3 conjuntos.

Quando somamos $|A_1| + |A_2| + |A_3|$, estamos contando alguns elementos em excesso. Especificamente:

- Aqueles que estão em 2 dos 3 conjuntos serão contados 2 vezes;
- Aqueles que estão nos 3 conjuntos serão contados 3 vezes.

Princípio de inclusão e exclusão

Para corrigir o primeiro erro podemos simplesmente descontar o total de elementos que está em 2 conjuntos:

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$$

mas os elementos que estão nos 3 conjuntos foram descontados 3 vezes nesta subtração!! Como eles tinham sido contados 3 vezes da primeira vez, ao final contamos cada um deles um total de $3 - 3 = 0$ vezes!

Princípio de inclusão e exclusão

Para corrigir esse último erro, basta contarmos mais uma vez os elementos que estão nos três conjuntos!

Com isso encontramos que:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Princípio de inclusão e exclusão

De modo geral, dados conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ finitos. Se denotarmos

- $S_1 := \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$
- $S_2 := \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} |A_i \cap A_j|,$
- $S_3 := \sum_{1 \leq i < j < k \leq n}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k|,$

$$\vdots$$

- $S_n := |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$

Então

$$\boxed{|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} S_n.}$$

Princípio de inclusão e exclusão

Exemplo 3.2

Numa aula de 30 alunos, 14 falam inglês, 5 falam espanhol e 7 falam japonês. Sabendo-se que 3 falam inglês e espanhol, 2 falam ingles e japonês, 2 falam espanhol e japonês e 1 fala as 3 línguas. Quantos alunos falam pelo menos uma destas 3 línguas ?

Se definirmos os conjuntos

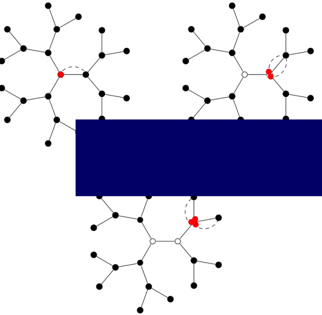
$$E = \{x/x \text{ fala espanhol}\},\ I = \{x/x \text{ fala inglês}\} \text{ e}$$
$$J = \{x/x \text{ fala japonês}\}$$

a resposta é o número de elementos de $E \cup I \cup J$.
Usando o princípio de inclusão e exclusão temos que

$$\begin{aligned} |E \cup I \cup J| &= |E| + |I| + |J| - (|E \cap I| + |E \cap J| + |J \cap I|) + |E \cap I \cap J|, \\ &= 14 + 5 + 7 - (3 + 2 + 2) + 1, \\ &= 20. \end{aligned}$$

Referências!

- Carvalho, P. C. P. Métodos de Contagem e Probabilidade. IMPA, 2015.
- Morgado, Carvalho, Carvalho, Fernandez. Analise combinatoria e probabilidade. SBM, 1991.
- Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.



Bom estudo!