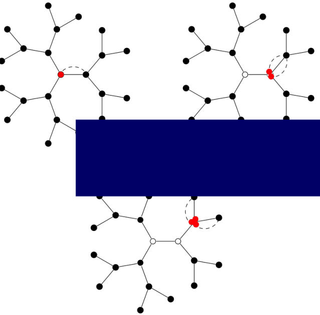
PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



PROCESSOS DE RAMIFICAÇÃO

Prof. Pablo M. Rodriguez
https://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco
CCEN
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo

- Processo de ramificação.
- Sobrevivência e extinção.

Considere uma variável aleatória discreta X com

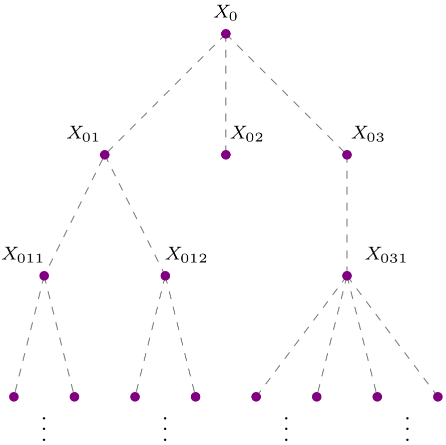
$$P(X = i) = p_i,$$

para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Suponha que

$$p_0 > 0 \quad \text{e que} \quad m := E(X) < \infty.$$

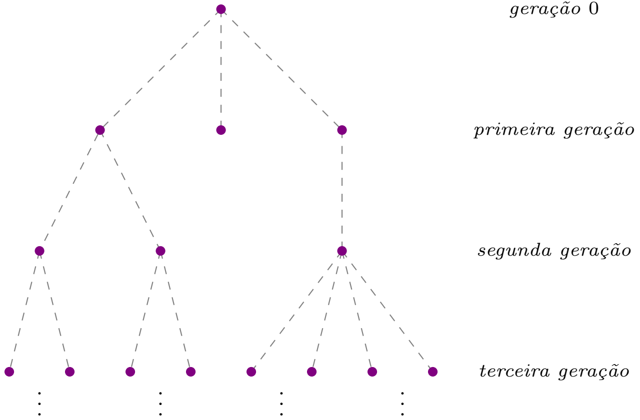
No que segue, consideramos variáveis $i.i.d.$ a X.

Processo de ramificação: ideia



Pergunta: o processo continuara indefinidamente?

Processo de ramificação: gerações



Processo de ramificação: a cadeia de Markov

Considere, para cada $n \geq 0$, a variável aleatória:

$$Z_n = \# \text{ de partículas da } n\text{-ésima geração},$$

e note que para todo $n \geq 1$ temos:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i,$$

onde $X_1, X_2, \ldots$ são i.i.d. à v.a. X. A sequência $(Z_n)_{n \geq 0}$ chama-se processo de ramificação ou processo de Galton-Watson e é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} P\left(\displaystyle\sum_{r=1}^{i} X_r = j\right), & \text{para } i \geq 1 \text{ e } j \geq 0, \\ 0, & \text{para } i = 0 \text{ e } j > 0, \\ 1, & \text{para } i = 0 \text{ e } j = 0. \end{cases}$$

Sobrevivência e extinção

Definição 1

Seja $(Z_n)_{n\geq 0}$ *um processo de ramificação. Dizemos que o processo extingue-se se evento*

$$\mathcal{E} := \bigcup_{n\geq 1} \{Z_n = 0\} \tag{1}$$

ocorrer e denotamos a probabilidade de extinção por $q := P(\mathcal{E})$.

Observação

Quando o evento $\mathcal{E}^c$ *ocorre dizemos que o processo sobrevive.*

Proposição 1

Seja $(Z_n)_{n\geq 0}$ *um processo de ramificação. Então*

$$q = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0).$$

A extinção do processo pode ser interpretada como a existência de uma geração a partir da qual não nascem mais partículas. Esse evento pode ser escrito também da seguinte maneira:

$$\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \{Z_k = 0\}. \tag{2}$$

Exercício. Mostre que os eventos (1) e (2) são equivalentes.

No que segue, consideramos processos de ramificação $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ com $Z_0 = 1$ e distribuição de descendência dada pela distribuição de X.

Proposição 2

Para todo $n \geq 1$, $E(Z_n) = m^n$.

Prova. Vamos mostrar que $E(Z_n) = m^n$ usando a seguinte propriedade das esperanças condicionais:

$$E(Z_n) = E\left(E(Z_n|Z_{n-1})\right).$$

... continuação. Em particular, como Z_{n-1} é uma variável aleatória discreta, a equação anterior diz que

$$E(Z_n) = \sum_{i=1}^{\infty} E(Z_n | Z_{n-1} = i) P(Z_{n-1} = i),$$

mas $Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_j$, onde X_j é i.i.d. à v.a. X, para todo j. Então

$$E(Z_n) = \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_j \middle| Z_{n-1} = i \right) P(Z_{n-1} = i).$$

... continuação. Por outro lado, dado que as v.a. X_i e Z_{n-1} são independentes temos que

$$E(Z_n) = \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\sum_{j=1}^{i} X_j\right) P(Z_{n-1} = i) = m \sum_{i=1}^{\infty} iP(Z_{n-1} = i)$$

Logo, para todo $n \geq 1$,

$$E(Z_n) = m\, E(Z_{n-1}).$$

Como $E(Z_1) = E(X) = m$ concluímos por indução que $E(Z_n) = m^n$.

Nota!

Se N é uma variável aleatória com valores em $\mathbb{Z}^+$ e $\{X_i\}_{i\geq 1}$ é uma sequência de v.a. i.i.d. e independentes a N, então $E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(X_1)E(N)$.

Para analisar a extinção ou não de um processo de ramificação vamos usar a função geradora de probabilidade (f.g.p.) de X. Isto é, consideramos:

$$\phi(t) := E\left(t^X\right) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i t^i, \quad |t| < 1.$$

Lembre que:

$$p_k = \frac{(d^{(k)}\phi(t)/dt)|_0}{k!}.$$

Proposição 3

Sejam $\phi(t)$ e $\phi_n(t)$ as f.g.p. das variáveis aleatórias X e Z_n, $n \geq 1$, respectivamente. Então

$$\phi_n(t) = \phi^n(t) \tag{3}$$

onde

$$\phi^n(t) = \underbrace{(\phi \circ \phi \circ \ldots \phi)}_{n \ vezes}(t).$$

Prova. Vamos provar (3) por indução em n. O caso $n = 1$ é direto pois

$$\phi_1(t) = E(t^{Z_1}) = E(t^X) = \phi(t).$$

Suponha que (3) vale para $n - 1$.

... continuação. Da definição de f.g.p.

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Z_n = i)t^i. \tag{4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(Z_n = i) &= \sum_{j=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_k = i \middle| Z_{n-1} = j \right) P(Z_{n-1} = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{j} X_k = i \middle| Z_{n-1} = j \right) P(Z_{n-1} = j) \qquad (5) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{j} X_k = i \right) P(Z_{n-1} = j), \end{aligned}$$

... continuação. De (4) e (5) temos que

$$\phi_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{j} X_k = i \right) t^i \right\} P(Z_{n-1} = j).$$

Mas

$$\sum_{i=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{j} X_k = i \right) t^i = E\left(t^{\sum_{k=1}^{j} X_k} \right) = \phi(t)^j,$$

então

$$\phi_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi(t)^j P(Z_{n-1} = j) = \phi_{n-1}(\phi(t)) = (\phi_{n-1} \circ \phi)(t).$$

Lembre que pela hipótese indutiva temos que

$$\phi_{n-1}(t) = \phi^{n-1}(t) = \underbrace{(\phi \circ \phi \circ \ldots \phi)}_{n-1 \text{ veces}}(t).$$

Proposição 4

Se $p_0 + p_1 < 1$, então ϕ satisfaz as seguintes propriedades:

i. ϕ *é estritamente convexa e crescente em* $[0, 1]$;
ii. $\phi(0) = p_0$ *e* $\phi(1) = 1$;
iii. *se* $\phi'(1) \leq 1$ *então* $\phi(t) > t$ *para* $t \in [0, 1)$;
iv. *se* $\phi'(1) > 1$ *então* $\phi(t) = t$ *tem uma única raiz em* $[0, 1)$;
v. $\phi'(1) = E(X)$.

Teorema 1

Seja $p_0 + p_1 < 1$*. A probabilidade de extinção* q *do processo* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *é a menor raiz não negativa da equação* $t = \phi(t)$*. Alem disso,*

i. *se* $m \leq 1$ *então* $q = 1$*;*

ii. *se* $m > 1$ *então* $q < 1$*.*

Prova. Vamos dividir a prova em duas partes:

- Vamos provar que q satisfaz $q = \phi(q)$. Para isto usamos as propriedades do processo e a continuidade de ϕ.
- Verificamos que q é a menor das raízes da equação anterior em $[0, 1]$. Fazemos isto usando o comportamento da f.g.p. de X.

Primeira Parte. Para todo $n \geq 0$ seja $q_n := P(Z_n = 0)$. Já vimos que:

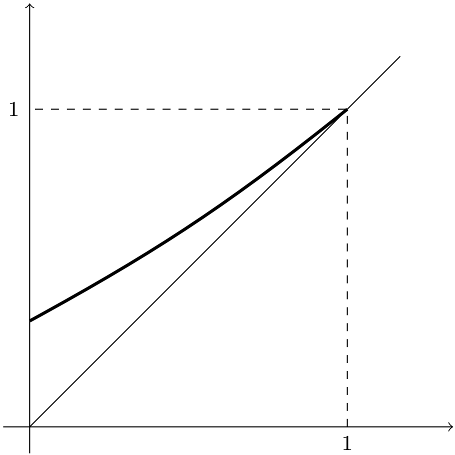
$$\lim_{n\to\infty} q_n = q. \tag{6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{i=0}^{\infty} P(Z_n = 0 | Z_1 = i) P(Z_1 = i | Z_0 = 1), \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \{P(Z_{n-1} = 0)\}^i p_i, \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \{q_{n-1}\}^i p_i, \\ &= \phi(q_{n-1}). \end{aligned}$$

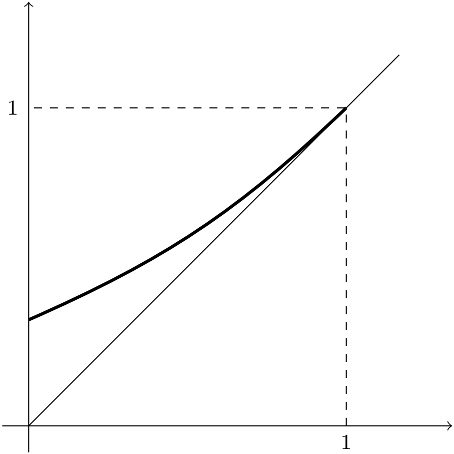
Isto é, $q_n = \phi(q_{n-1})$, e como ϕ é contínua, resulta de (6) que $q = \phi(q)$.

Segunda Parte. Estudamos as soluções de $t = \phi(t)$ através do comportamento de ϕ.



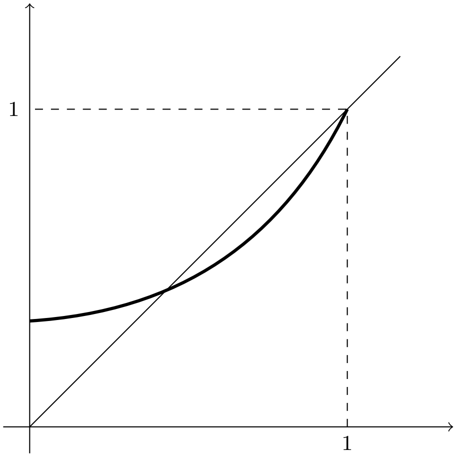
$$\phi'(1) = m < 1 \Rightarrow q = 1$$

Segunda Parte. Estudamos as soluções de $t = \phi(t)$ através do comportamento de ϕ.



$$\phi'(1) = m = 1 \Rightarrow q = 1$$

Segunda Parte. Estudamos as soluções de $t = \phi(t)$ através do comportamento de ϕ.



$$\phi'(1) = m > 1 \Rightarrow q = 1 \text{ ou } q < 1?$$

Segunda Parte. Vamos focar no caso $\phi'(1) = m > 1$. Usamos $q_n = \phi(q_{n-1})$ para encontrar os valores q_i a partir de ϕ. De fato,

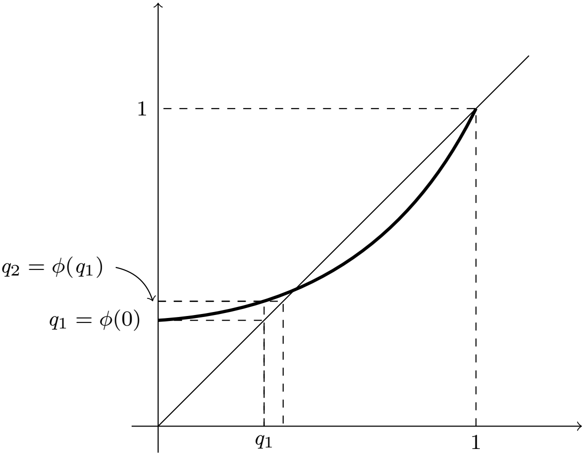
$$\begin{array}{rclclcl} q_0 & = & 0 & & & & \\ q_1 & = & \phi(q_0) & = & \phi(0) & = & p_0 \\ q_2 & = & \phi(q_1) & = & \phi(p_0) & & \\ & \vdots & & & & & \end{array}$$

Assim, os valores q_i convergem para a primeira interseção das curvas:

$$y = t \quad \text{e} \quad y = \phi(t).$$

De fato, note que $q_n \nearrow$ então do anterior $\phi(q_n) \geq q_n$. Portanto, $q < 1$ quando $m > 1$.

Construção geométrica de q_i e q para $m > 1$



$p_0 + p_1 = 1$

Suponha que $p_0 + p_1 = 1$. Se

$$\tau_0 = \inf\{n \geq 1 : Z_n = 0\}$$

então,

$$\tau_0 \sim Geom(p_0)$$

e $P(\tau_0 < \infty) = 1$. Isto é, $q = 1$.

Exemplo 1

Os processos de ramificação de divisão binaria são importantes na biología. Neste caso,

$$p_0 = 1 - p \qquad e \qquad p_2 = p,$$

para $p \in (0, 1)$. *Logo,*

$$\phi(t) = 1 - p + pt^2$$

e $m = \phi'(1) = 2p$. *Do Teorema 1 temos que* $q = 1$ *se* $p \leq 1/2$ *e* $q = (1 - p)/p$ *se* $p > 1/2$.

Exemplo 2

Keyfitz (1977) estimou que a distribuição do número de filhas de mulheres japonesas de certa cidade, de idades entre 45 e 49 anos em 1960 é dada por:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 0.2092\\
p_1 &= 0.2584\\
p_2 &= 0.2360\\
p_3 &= 0.1593\\
p_4 &= 0.0828\\
p_5 &= 0.0357\\
p_6 &= 0.0133\\
p_7 &= 0.0042\\
p_8 &= 0.0011\\
p_9 &= 0.0002\\
p_{10} &= 0.0000
\end{aligned}
$$

Então, o número esperado de filhas em uma família é dado por $1,837$ *e a probabilidade de extinção é* $q < 1$. *Do Teorema 1 podemos estimar que* $q \approx 0.324$.

Exemplo 3

Suponha que $p_k = bp^{k-1}$, *para* $k \in \{1, 2, \dots\}$, *e que*

$$p_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1-b-p}{1-p}.$$

Neste caso, temos que a f.g.p. de X *é dada por*

$$\phi(t) = 1 - \frac{b}{1-p} + \frac{bt}{1-pt}.$$

Em particular,

$$m = \frac{b}{(1-p)^2}$$

e podemos aplicar o Teorema 1 para concluir que se $m > 1$, $q < 1$ *e é a menor raíz de*

$$t = 1 - \frac{b}{1-p} + \frac{bt}{1-pt}.$$

Isto é, $q = \dfrac{1-b-p}{p(1-p)}$.

... continuação do exemplo. Por outro lado, podemos aplicar a Proposição 3 para obter a distribuição de Z_n. Quando $m \neq 1$ temos:

$$\phi_n(t) = 1 - m^n \left(\frac{1-q}{m^n - q} + \frac{m^n \left(\frac{1-q}{m^n-q}\right)^2 t}{1 - \left(\frac{m^n-1}{m^n-q}\right) t} \right), \tag{7}$$

e quando $m = 1$ que

$$\phi_n(t) = \frac{np - (np + p - 1)t}{1 - p + np - npt}. \tag{8}$$

Logo podemos calcular as probabilidades $P(Z_n = k)$ a partir da f.g.p. Se $m \neq 1$ temos que

$$P(Z_n = 0) = 1 - m^n \left(\frac{1-q}{m^n - q} \right)$$

enquanto que, para $i \geq 1$

$$P(Z_n = i) = m^n \left(\frac{1-q}{m^n - q} \right)^2 \left(\frac{m^n - 1}{m^n - q} \right)^{i-1}.$$

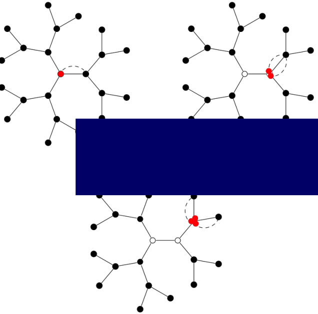
Sobre os exemplos anteriores

Processos de ramificação como no Exemplo anterior podem ser usados para estudar a descendência de uma família. Um exemplo dado por Lotka (1939), bastante citado na literatura, mostra que a distribuição $p_0 = 0,4825$ e $p_k = (0,2126)(0,5893)^{k-1}$, para $k \geq 1$, é apropriada para descrever a descendência direta de homens americanos (os valores numéricos estão baseados em um censo de 1920). Lotka aplicou o Teorema 1 para determinar que a probabilidade de extinção neste caso é $q = 0,819$.

Outro exemplo interessante aparece de analisar os dados do exemplo de Keyfitz. Neste caso podemos mostrar que a distribuição $p_k = (0,3666)(0,5533)^{k-1}$ pode ser apropriada para descrever os dados obtidos.

Referências principais

- R. Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser Boston, 1999. Ver também: Uma introdução aos processos estocásticos espaciais, IMPA, 1995.
- P. M. Rodriguez, Modelos probabilísticos discretos y aplicaciones, Notas EMALCA - Colombia, 2017.



Bom estudo!

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org

e-mail: pablo@de.ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza