Aula 23: Teoremas limite

Disciplina: PGE950 - Probabilidade

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

http://www.pablo-rodriguez.org

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo desta aula

- Sequências de eventos e Lema de Borel-Cantelli.
- Lei Forte dos Grandes Números.

Sequências de eventos

Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma sequência de eventos de Ω definimos:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Observação!

Notação: $\limsup_{n\to\infty} A_n = [A_n \text{ infinitas vezes}] = [A_n\ i.v.]$, *pois* $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ *se, e somente se,* ω *pertence a um número infinito dos* A_n.

Observação!

$\liminf_{n\to\infty} A_n$ *é o evento de ocorrência de* A_n *para* n *suficientemente grande.*

Limite de uma sequência de eventos

Se para uma sequência de eventos $A_1, A_2, \ldots$ vale que:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n =: A,$$

então A chama-se o limite da sequência e denota-se:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad \text{ou} \quad A_n \to A.$$

Exemplo 23.1

Se, para cada $n \geq 1$,

$$A_n = \left[0, \frac{n}{n+1}\right),$$

então $\lim_{n\to\infty} A_n = [0, 1)$.

Exemplo 23.2

Se $A_n \nearrow$, *então* $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *De fato, note que, por um lado*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

e por outro lado,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Então,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

Por quê?

$\ldots$ *e portanto* $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Observação!

De forma similar ao Exemplo 23.2 prova-se: $A_n \searrow$ *implica* $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Outra propriedade útil: $\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$.

De fato, pelas Leis de Morgan:

$$\begin{aligned}
\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \\
&= \liminf_{n\to\infty} A_n^c
\end{aligned}$$

Lema de Borel-Cantelli

Proposição 23.1

Sejam $A_1, A_2, \ldots$ *eventos aleatórios em* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

i. *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, *então*

$$P(A_n \; i.v.) = 0.$$

ii. *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ *e os eventos são independentes, então*

$$P(A_n \; i.v.) = 1.$$

Exemplo 23.3

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ *variáveis aleatórias tais que* $X_n \sim \text{Bernoulli}(p_n)$.

$$\text{Se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty, \quad \text{então} \quad X_n \xrightarrow{q.c.} 0.$$

De fato, se $A_n := \{X_n = 1\}$ *para* $n \geq 1$ *temos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$$

e o Lema de Borel-Cantelli (i) implica $P(\{X_n = 1\}\ i.v.) = 0$. *Isto é:*

$$1 = P\left(\left[\limsup_{n\to\infty} \{X_n = 1\}\right]^c\right) = P\left(\liminf_{n\to\infty} \{X_n = 0\}\right).$$

Observação!

Adicionalmente, se há independência temos que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty \iff X_n \xrightarrow{q.c.} 0.$

Lei Forte dos Grandes Números

Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias integráveis em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e seja:

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \text{ para cada } n \geq 1.$$

Lembre: $X_1, X_2, \dots$ satisfazem a Lei Forte dos Grandes Números se

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{q.c.} 0,$$

ou, analogamente, se

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n}\right\} = 0\right) = 1.$$

Desigualdade de Kolmogorov

Proposição 23.2

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com $E(X_n) = 0$ e $Var(X_n) < \infty$, para todo $n \geq 1$. Então, para todo $\lambda > 0$:

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k).$$

Observação!

Note que zazendo $n = 1$ obtemos a Desigualdade Clássica de Tchebychev.

Primeira Lei Forte de Kolmogorov

Teorema 23.1

Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes e integráveis, com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty.$$

Então a sequência satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números.

Ideia da prova da PLFK. Primeiro prove para o caso em que $E(X_n) = 0$, para todo $n \geq 1$. Para provar que $S_n/n \xrightarrow{q.c.} 0$ defina

$$M_n := \max_{2^n \leq k \leq 2^{n+1}} \frac{|S_k|}{k},$$

e verifique que:

- Para todo $m \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P\left(M_n \geq 1/m\right) < \infty$ (des. de Kolmogorov);
- e depois que $M_n \xrightarrow{q.c.} 0$ (pelo anterior e o Lema de Borel-Cantelli).

O resultado segue pois, para cada n existe $\ell(n)$, tal que $\ell(n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $|S_n|/n \leq M_{\ell(n)}$.

Para considerar o caso geral, qualquer $E(X_n) < \infty$, considere $Y_n := X_n - E(X_n)$, para todo $n \geq 1$, e aplique a conclusão anterior.

Lema 23.1

Seja X variável aleatória integrável com função de distribuição F.

Então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \int_{-n}^{n} x^2 \, dF(x) \right\} < \infty.$$

Observação!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \int_{-n}^{n} x^2 \, dF(x) \right\} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \int_{-n}^{n} x^2 f(x) \, dx \right\}, & \textit{se } X \textit{ é contínua,} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \sum_{i=-n}^{n} i^2 \, p(i) \right\}, & \textit{se } X \textit{ é discreta.} \end{cases}$$

Lei Forte de Kolmogorov

Teorema 23.2

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ *variáveis aleatórias i.i.d., integráveis, e* $\mu := E(X_n)$.

$$\text{Então,} \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} \mu.$$

Ideia da prova da Lei Forte de Kolmogorov. Prove primeiro para $\mu = 0$ (depois aplique em $X_n - \mu$).

Defina as variáveis aleatórias

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{se } -n < X_n \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e $Z_n := X_n - Y_n$. Provar que:

- $\dfrac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n} \xrightarrow{q.c.} 0$ (Borel-Cantelli);
- $\dfrac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \dfrac{\sum_{i=1}^n E(Y_i)}{n} \xrightarrow{q.c.} 0$ (Lema 23.1 e PLFK);
- $\dfrac{\sum_{i=1}^n E(Y_i)}{n} \longrightarrow 0$ (Teorema da Convergência Dominada).

... ideia da prova da Lei Forte de Kolmogorov. Note que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n},$$

e pelas convergências quase certa de antes temos que se

$$A := \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n} = 0 \right\}$$

e

$$B := \left\{ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} E(Y_i)}{n} \right) = 0 \right\},$$

então $P(A) = P(B) = 1$. Agora, note que para $\omega \in A \cap B$ vale que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)}{n} = 0.$$

Portanto, como $P(A \cap B) = 1$ concluímos que

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)}{n} = 0 \right) = 1.$$

Bom estudo!