Lista de exercícios 4 - Cadeias de Markov a tempo discreto

PGE966 - Processos Estocásticos | 1° Semestre de 2021

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

---

1. Considere a cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\{0,1,2,3,4,5\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Encontre todas as classes e determine quais são transientes e quais são recorrentes.

2. Considere a cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com conjunto de estados $\{0,1,2,3,4,5\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Encontre todas as classes e determine quais são transientes e quais são recorrentes.

3. Considere uma cadeia de Markov em $\{0,1,2,\ldots\}$ para a qual 0 é uma armadilha, isto é, $p(0,0) = 1$. Suponha que $\{1,2,\ldots\}$ é outra classe e que $p(i,0) > 0$ para algum $i \geq 1$.
   (a) O que pode dizer sobre a recorrência de cada classe?
   (b) Você pode supor algo com relação da possível evolução desta cadeia?

4. De um exemplo de uma classe infinita e fechada, que seja transiente.

5. Considere a cadeia de Markov com conjunto de estados $\{0,1,2,3\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 7/10 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontre o tempo médio para o processo alcançar o estado 3 dado que começa no estado 0.

6. Considere a cadeia de Markov com conjunto de estados $\{0,1,2\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determine a probabilidade da cadeia terminar no estado 0 dado que começou no estado 1.
   (b) Suponha que $P(X_0 = i) = 1/3$, i=0,1,2. Determine o tempo médio de absorção do processo.

7. Suponha que em um grupo de 5 pessoas está subdividido em ignorantes (pessoas que não sabem da informação) e informantes (pessoas que sabem da informação). Suponha que em cada instante de tempo ocorre uma interação entre um par destas pessoas, e que cada par tem a mesma probabilidade de interagir. Se uma das pessoas do par é um informante e a outra é um ignorante, o informante conta a informação com probabilidade p e neste caso o ignorante vira informante. Em qualquer outra situação nada acontece. Suponha que inicialmente só um deles é informante. Calcule o tempo médio até que todos sabem da informação.

8. Uma urna contem 5 bolas vermelhas e 3 bolas verdes. As bolas são escolhidas ao acaso, uma por uma, da urna. Se a bola escolhida for vermelha então ela é retirada da urna. As bolas verdes escolhidas são devolvidas à urna. O processo de seleção continua até que todas as bolas vermelhas são removidas da urna. Qual é o tempo médio de duração do jogo?

9. Mostre que se $p_i > 0$ para cada $i \geq 0$, e $q_i > 0$ para cada $i \geq 1$, então a cadeia de nascimento e morte correspondente é irredutível.

10. Considere o PA em $\mathbb{Z}^+$ tal que

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 1 | Y_n = 0) = p_0 = 1 - \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 | Y_n = 0)$$

e

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = i + 1 | Y_n = i) = p_i = 1 - \mathbb{P}(Y_{n+1} = i - 1 | Y_n = i),$$

para todo $n \geq 0$ e para todo $i \geq 1$. Discuta sobre a recorrência e transiência deste PA nos seguintes casos:

(a) existe $\ell := \lim_{i\to\infty} p_i$ e $\ell > 1/2$;

(b) existe $\ell := \lim_{i\to\infty} p_i$ e $\ell < 1/2$.