Lista de exercícios 2
PGE966 - Processos Estocásticos | PPGE - UFPE
Prof. Pablo M. Rodriguez
1° Semestre de 2021

---

1. Prove que, para qualquer $p \in (0,1)$, vale que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1$.

2. Um sistema é formado por n componentes, cada um dos quais irá funcionar, independentemente, com probabilidade p. O sistema total funciona de forma efetiva se pelo menos metade de seus componentes funcionar. Para que valores de p um sistema com 5 componentes tem maior probabilidade de funcionar corretamente do que um sistema com 3 componentes?

3. Seja X uma variável aleatória e seja $x_n \searrow y$. Mostre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \{X \leq y\}$.

4. Seja X uma variável aleatória e seja $x_n \nearrow +\infty$. Mostre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \Omega$.

5. Seja $p(k) = P(X = k)$ a função de probabilidade correspondente a uma distribuição de Poisson com parâmetro λ. Verifique que $p(0) = e^{-\lambda}$ e que $p(k) = (\lambda/k)p(k-1)$.

6. Prove que, para qualquer $p \in (0,1)$, vale que $\sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = 1$.

7. Suponha que pacotes SMTP chegam a um servidor de e-mails de acordo com um processo de Poisson com parâmetro 2. Seja $N(s,t)$ o número de mensagens que chegam no intervalo de tempo $(s,t]$ e denote $N(t) := N(0,t)$. Determine as seguintes probabilidades:
   (a) $P(N(1) = 2)$;
   (b) $P(\{N(1) = 2\} \cap \{N(3) = 6\})$;
   (c) $P(N(1) = 2 | N(3) = 6)$;
   (d) $P(N(3) = 6 | N(1) = 2)$.

8. Seja $X \sim Geom(p)$. Prove que $P(X = n + k | X > n) = P(X = k)$. Interprete esta propriedade.

9. Sejam X e Y v. a. independentes, tomando valores em $\mathbb{Z}$ e com f. p. dada por $p_X(i)$ e $p_Y(i)$, respectivamente. Mostre que
$$P(X + Y = i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_X(k) p_Y(i-k),$$
para $i \in \mathbb{Z}$.

10. O número de pessoas que entra em um elevador no andar térreo é uma variável de Poisson com média 10. Se existem N andares acima do térreo e se cada pessoa tem a mesma probabilidade de descer em cada um dos andares, independentemente de onde descem as demais, calcule o número esperado de paradas que o elevador fará antes de descarregar todos os seus passageiros.

11. Seja $X \sim Geom(p)$. Encontre $E(X)$ usando propriedades de esperança condicional.

12. Uma moeda que dá cara com probabilidade p é jogada continuamente. Calcule o número esperado de jogadas que precisam ser feitas até que uma série de r caras seguidas seja obtida.[1]

13. Enuncie e prove as desigualdades de Markov e de Chebyshev.

---

[1]Dica: Condicione no instante da primeira ocorrência de uma coroa para obter $E(X) = (1-p)\sum_{i=1}^{r} p^{i-1}(i + E(X)) + (1-p)\sum_{i=r+1}^{\infty} p^{i-1} r$.