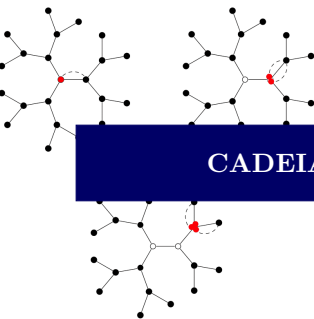


PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE



CADEIAS DE MARKOV A TEMPO DISCRETO

Prof. Pablo M. Rodriguez

<https://www.pablo-rodriguez.org>



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

CCEN

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
E DA NATUREZA

Conteúdo

- ▶ Cadeias de Markov a tempo discreto
- ▶ Classificação de estados
- ▶ Critério de recorrência e transiência



Processo estocástico

Um processo estocástico a tempo discreto é uma sequência de variáveis aleatórias:

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

ou $(X_n)_{n \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, definidas no mesmo espaço de probabilidade e tomando valores em algum conjunto enumerável S .

Observação

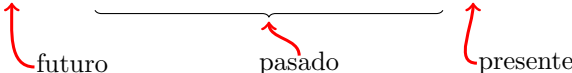
*O conjunto S chama-se **espaço de estados** do processo e cada um dos seus elementos chama-se **estado**.*



Propriedade Markoviana e Cadeia de Markov

Uma cadeia de Markov a tempo discreto (CMTD) com espaço de estados \mathcal{S} é um processo estocástico $(X_n)_{n \geq 0}$ com valores em \mathcal{S} tal que

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$



para todo $n \geq 0$ e para todo subconjunto $\{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j\} \subset \mathcal{S}$.

Nota!

O início da teoria das cadeias de Markov remonta-se a 1913, com o trabalho do matemático russo A.A. Markov. Markov passou horas estudando os padrões de vogais e consoantes de uma novela de Alexander Pushkin e, embora sua análise não aportou muito ao estudo da literatura da época, suas ideias deram origem ao que conhece-se como cadeias de Markov (Hayes, 2013).



Supomos que para todo $i, j \in \mathcal{S}$ e para todo $n \geq 0$ as probabilidades

$$p(i, j) := P(X_{n+1} = j | X_n = i),$$

chamadas **probabilidades de transição** não dependem de n . Neste caso dizemos que a cadeia de Markov é homogênea.

Note que $p(i, j) \in [0, 1]$ e que

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} p(i, j) = 1.$$



Uma cadeia de Markov pode ser completamente determinada pelas probabilidades de transição e pela distribuição do seu estado inicial:

se $P(X_0 = i) = \alpha_i$, para todo $i \in \mathcal{S}$, com $\alpha_i \in [0, 1]$ e $\sum_{i \in \mathcal{S}} \alpha_i = 1$,

então

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \alpha_{i_0} p(i_0, i_1) p(i_1, i_2) \dots p(i_{n-1}, i_n).$$



Exemplo 1: o processo de ramificação

Considere uma variável aleatória discreta X com função de probabilidade

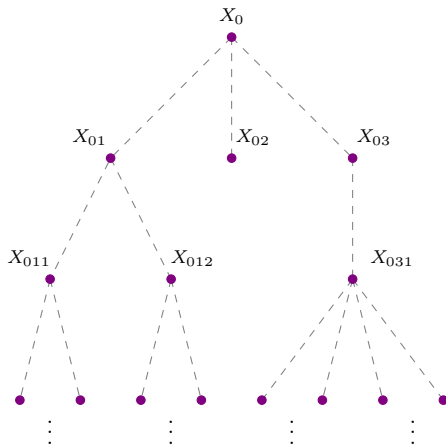
$$P(X = i) = p_i,$$

para $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

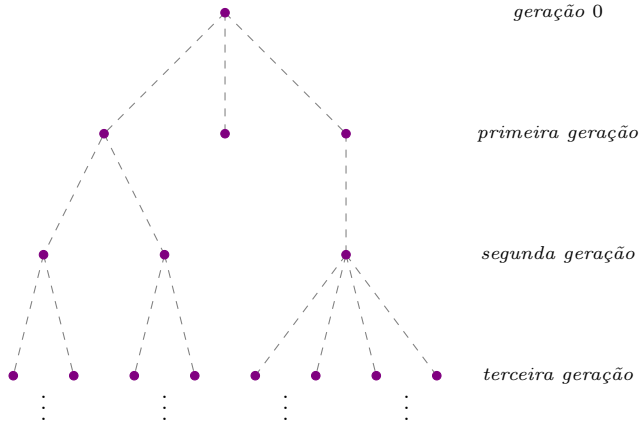
No que segue, todas as variáveis são cópias independentes de X .



Processo de ramificação: ideia



Processo de ramificação: gerações



Processo de ramificação: a cadeia de Markov

Considere, para cada $n \geq 0$, a variável aleatória:

$$Z_n = \# \text{ de partículas da } n\text{-ésima geração,}$$

e note que para todo $n \geq 1$ temos:

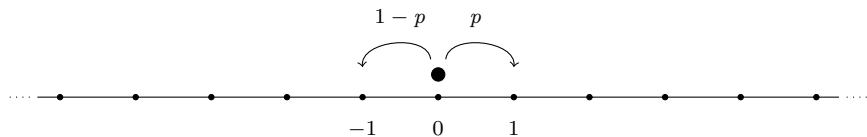
$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i,$$

onde X_1, X_2, \dots são i.i.d. à v.a. X . A sequência $(Z_n)_{n \geq 0}$ chama-se processo de ramificação ou processo de Galton-Watson e é uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e probabilidades de transição:

$$p(i, j) = P(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \begin{cases} P\left(\sum_{r=1}^i X_r = j\right), & \text{para } i \geq 1 \text{ e } j \geq 0, \\ 0, & \text{para } i = 0 \text{ e } j > 0, \\ 1, & \text{para } i = 0 \text{ e } j = 0. \end{cases}$$



Exemplo 2: o passeio aleatório em \mathbb{Z}



O passeio aleatório em \mathbb{Z}

Consideramos a sequência de v.a. i.i.d. X_1, X_2, X_3, \dots tal que

$$P(X_1 = 1) = p = 1 - P(X_1 = -1).$$

Se Y_n denota a posição da partícula no n -ésimo instante de tempo, então

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n, \quad \text{para todo } n \in \{1, 2, \dots\}.$$

A sequência $(Y_n)_{n \geq 0}$ chama-se passeio aleatório em \mathbb{Z} e é uma cadeia de Markov com espaço de estados \mathbb{Z} e probabilidades de transição:

$$p(i, j) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i) = \begin{cases} p, & \text{para } j = i + 1, \\ 1 - p, & \text{para } j = i - 1, \\ 0, & \text{para } j \neq i \pm 1. \end{cases}$$



Exemplo 3: modelo de rumor de Daley-Kendall

[Daley e Kendall, 1964]



Epidemics and Rumours. Nature 204 (1964), 1118.

Stochastic Rumours. J. Inst. Maths Applies 1 (1964), 42-55.

“let’s keep it simpler and leave it to others to think of variations”
was Kendall’s advice (Daryl Daley. Comunicação pessoal, 2019)

[Maki e Thompson, 1973]



Mathematical Models and Applications. Prentice-Hall, N.J. (1973).



Primeiras considerações: a população

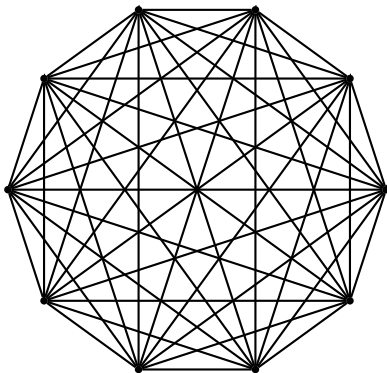


Figura: Grafo completo K_{10} .



Primeiras considerações: a população

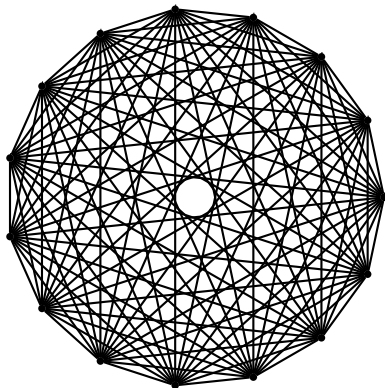


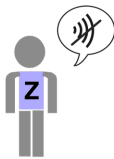
Figura: Grafo completo K_{15} .



Primeiras considerações: tipos de indivíduos



Propagadores
(Spreaders)



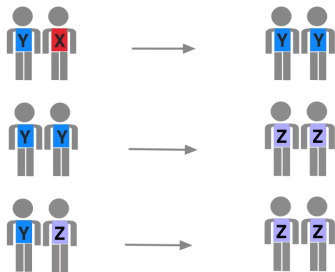
Neutros
(Stiflers)



Ignorantes
(Ignorants)

Primeiras considerações: interações

- ▶ Pares de indivíduos interagem em tempos *i.i.d.* $Exp(1)$.
- ▶ Ocorrem as seguintes transições:



Modelo de Daley-Kendall a tempo discreto

Para cada $n \geq 0$, consideramos as variáveis aleatórias:

- ▶ X_n = número de ignorantes no tempo n ,
- ▶ Y_n = número propagadores no tempo n ,
- ▶ Z_n = número de neutros no tempo n .

Supomos que $X_0 = N - 1$, $Y_0 = 1$, $Z_0 = 0$ e que

$$X_n + Y_n + Z_n = N$$

para todo $n \geq 0$, o que representa que a população é fechada.

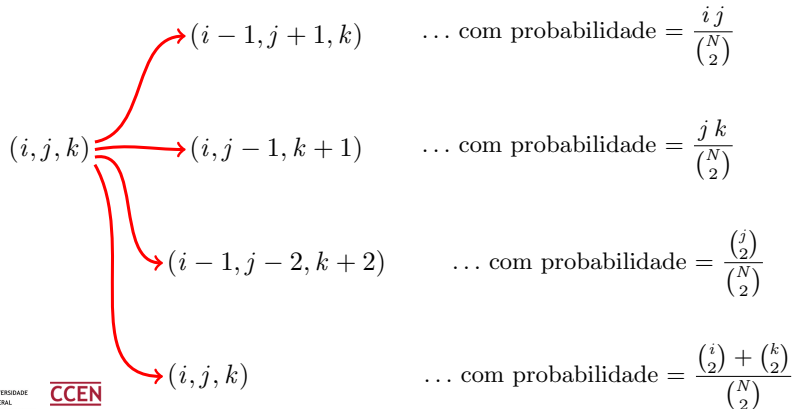


Modelo de Daley-Kendall a tempo discreto

O modelo de Daley-Kendall a tempo discreto é a CMTD $(V_n)_{n \geq 0}$,

$$V_n := (X_n, Y_n, Z_n),$$

com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, N\}^3$ e transições dadas por:



Em outras palavras:

$$P((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i-1, j+1, k) | (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)) = \frac{i j}{\binom{N}{2}};$$

$$P((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i, j-1, k+1) | (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)) = \frac{j k}{\binom{N}{2}};$$

$$P((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i-1, j-2, k+2) | (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)) = \frac{\binom{j}{2}}{\binom{N}{2}}.$$

$$P((X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) = (i, j, k) | (X_n, Y_n, Z_n) = (i, j, k)) = \frac{\binom{i}{2} + \binom{k}{2}}{\binom{N}{2}}.$$

Observação

Para formular a versão discreta a partir da continua note que se X_1, \dots, X_n são i.i.d. com distribuição comum $Exp(\lambda)$ então $P(X_i < \min_{j \neq i} \{X_j\}) = 1/n$.



Matriz de transição

Podemos reunir a informação das probabilidades de transição em uma matriz P , chamada **matriz de transição**, cujas entradas são os valores $p(i, j)$. Se $|\mathcal{S}| = n$, a matriz de transição é dada por:

$$P := \begin{bmatrix} p(1, 1) & p(1, 2) & p(1, 3) & \dots & p(1, n) \\ p(2, 1) & p(2, 2) & p(2, 3) & \dots & p(2, n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(n, 1) & p(n, 2) & p(n, 3) & \dots & p(n, n) \end{bmatrix}.$$

Lembre que se $i, j \in \mathcal{S}$ então $p(i, j) \in [0, 1]$ e $\sum_{j \in \mathcal{S}} p(i, j) = 1$.

Uma matriz com estas propriedades chama-se **matriz estocástica**.

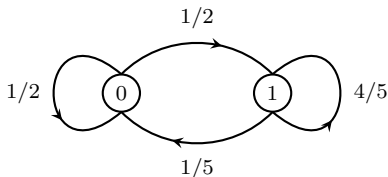


Representação gráfica de uma cadeia de Markov

Considere a CMTD $(X_n)_{n \geq 0}$ com espaço de estados $\{0, 1\}$ e matriz de transição dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Podemos representar:



Outra forma de definir uma cadeia de Markov

Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ um processo com valores no conjunto \mathcal{S} . Se existe uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d.

$$U_1, U_2, \dots$$

com distribuição comum uniforme no intervalo $(0, 1)$ e uma função

$$f : \mathcal{S} \times (0, 1) \rightarrow \mathcal{S}$$

tal que

$$X_{n+1} = f(X_n, U_n),$$

para todo $n \geq 0$, dizemos que $(X_n)_{n \geq 0}$ é uma cadeia de Markov a tempo discreto.



Exemplo 1

Considere o passeio aleatório em \mathbb{Z} , $(Y_n)_{n \geq 0}$. Se U_1, U_2, \dots são i.i.d. com $U_1 \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ então podemos escrever

$$Y_{n+1} = f(Y_n, U_n),$$

onde a função $f : \mathbb{Z} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ é dada por

$$f(i, u) := \begin{cases} i + 1, & \text{si } u < p, \\ i - 1, & \text{si } u \geq p. \end{cases}$$



Probabilidades de transição em n passos

Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados \mathcal{S} . Chama-se **probabilidades de transição em n passos** às probabilidades

$$p_n(i, j) := P(X_{m+n} = j | X_m = i),$$

para todo $m, n \geq 0$ e $i, j \in \mathcal{S}$. Neste caso

$$p_1(i, j) = p(i, j)$$

e por convenção supomos que

$$p_0(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$



Equações de Chapman-Kolmogorov

Proposição 1

Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados \mathcal{S} . Então,

$$p_{n+r}(i, j) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_n(i, k) p_r(k, j),$$

para todo $n, r \geq 0$ e $i, j \in \mathcal{S}$.



Prova das Equações de Chapman-Kolmogorov. Por definição

$$p_{n+r}(i, j) = P(X_{n+r} = j | X_0 = i).$$

Por outro lado, $\{X_{n+r} = j\} = \bigcup_{k \in \mathcal{S}} (X_{n+r} = j, X_n = k)$ e então

$$p_{n+r}(i, j) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P(X_{n+r} = j, X_n = k | X_0 = i).$$

Além disto

$$P(X_{n+r} = j, X_n = k | X_0 = i)$$

||

$$P(X_{n+r} = j | X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k | X_0 = i)$$

mas

$$P(X_{n+r} = j | X_n = k, X_0 = i) = P(X_{n+r} = j | X_n = k) = p_r(k, j) \text{ (Markov)}$$

$$\dots \text{ e } P(X_n = k | X_0 = i) = p_n(i, k).$$



Recorrência e transiência

Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados \mathcal{S} . Para $i \in \mathcal{S}$ seja

$$\tau_i := \inf\{n \geq 1 : X_n = i\},$$

com $\tau_i := \infty$ se o infimo não existe. Se

$$\mathbb{P}(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$$

dizemos que i é um estado recorrente. Se i não é recorrente dizemos que é transiente; isto é, se

$$\mathbb{P}(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$$

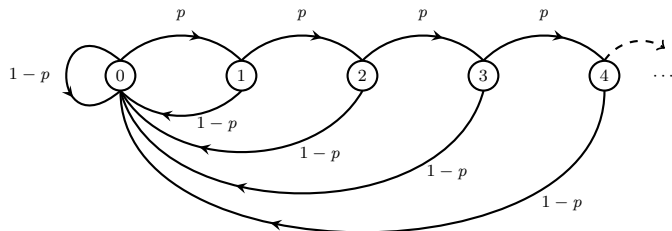
dizemos que i é transiente.



Castelo de cartas

Exemplo 2

Considere a CMTD dada por:



Dado que $X_0 = 0$, $\tau_0 \sim \text{Geométrica}(1-p)$. Como $p \in (0,1)$ temos que

$$P(\tau_0 < \infty | X_0 = 0) = 1.$$

Isto é, o estado 0 é recorrente!



Teorema 1

Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados \mathcal{S} e probabilidades de transição $p(i, j)$ para $i, j \in \mathcal{S}$. Então

$$i \in \mathcal{S} \text{ é recorrente se, e somente se, } \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i, i) = \infty.$$



Prova do Teorema 1. Para cada $n \geq 1$ considere a variável indicadora

$$I_n := \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = i, \\ 0, & \text{se } X_n \neq i, \end{cases}$$

e observe que $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ é o número de visitas do processo ao estado i .

(\Rightarrow) Suponha que i é recorrente. Então

$$P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1 \quad \text{e} \quad E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = i\right) = \infty.$$

Mas

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(I_n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i, i).$$



Prova do Teorema 1. (\Leftarrow) Para provar a volta suponha que i é transiente. Neste caso

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = i \right) \sim \text{Geom}(p_i)$$

onde $p_i := P(\tau_i = \infty \mid X_0 = i) > 0$ e portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i, i) = E \left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = i \right) = \frac{1}{p_i} < \infty.$$



Referências

Modelos probabilísticos discretos y aplicaciones, Pablo M. Rodriguez.
Notas de minicurso, EMALCA - Colombia (2017).
Preprint: <https://www.pablo-rodriguez.org/pge977-topicos>

Referências adicionais:

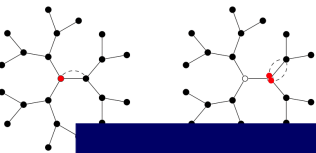


R. Schinazi. Classical and Spatial Stochastic Processes, Birkhäuser Boston, 1999. Ver também: Uma introdução aos processos estocásticos espaciais, IMPA, 1995.

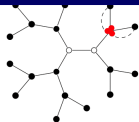


B. Hayes. (2013) First links in the Markov chain. American Scientist 101, pp. 92-97. Disponível em: <https://www.americanscientist.org/article/first-links-in-the-markov-chain>





Bom estudo!



Prof. Pablo M. Rodriguez
<https://www.pablo-rodriguez.org>
e-mail: pablo@de.ufpe.br



UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

CCEN

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
E DA NATUREZA