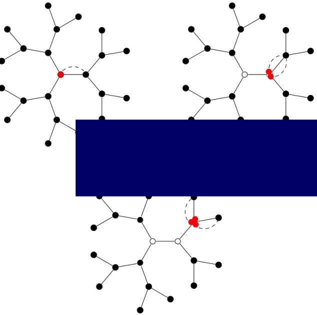
ET581 - Probabilidade 1

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



PERMUTAÇÕES

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et581-probabilidade1

Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 3

- Lembrete: Princípio multiplicativo;
- Permutações simples.

Lembrete

O princípio multiplicativo pode-se escrever de forma mais geral:

Se r experimentos são tais que o primeiro tem n_1 resultados possíveis; e se, para cada um desses n_1 resultados houver n_2 resultados possíveis para o segundo experimento; e se, para cada um dos possíveis resultados dos dois primeiros experimentos houver n_3 resultados possíveis para o terceiro experimento; e se ..., então haverá um total de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ resultados possíveis para os r experimentos.

Exemplo 3.1

Quantas funções definidas em n pontos são possíveis se cada valor da função for igual a 0, 1 ou 2?

Solução. *Suponha que os pontos são:*

$$1, 2, \ldots, n.$$

Podemos pensar as decisões como:

$$d_i : \ \textit{escolher o valor de } f(i)$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*. Temos* n *decisões e cada uma pode ser tomada de* 3 *formas diferentes. Portanto, temos*

$$3 \times 3 \times \cdots \times 3 = 3^n$$

funções possíveis.

Permutações: motivação

Exemplo 3.2

Quantos são os anagramas da palavra UFPE?

Observação

Um anagrama é um reordenamento das letras de uma palavra (sem importar se a nova ordem é ou não uma palavra da língua portuguesa).

Solução: *As possíveis ordenações são*

$$\begin{array}{cccccc} UFPE, & UFEP, & UEFP, & UPFE, & UEPF, & UPEF, \\ FUEP, & FUPE, & FEPU, & FEUP, & FPUE, & FPEU, \\ PEFU, & PEUF, & PFUE, & PFEU, & PUEF, & PUFE, \\ EUPF, & EUFP, & EFPU, & EFUP, & EPFU, & EPUF. \end{array}$$

Em outras palavras, se consideramos o conjunto $A = \{U, F, P, E\}$ *então temos 24 formas de ordenar os elementos deste conjunto.*

Permutações: motivação

… continuação do Exemplo 3.2. Em lugar de fazer a lista podemos aplicar o princípio multiplicativo com as decisões:

- d_1: escolher a primeira letra (4 formas);
- d_2: escolher a segunda letra (3 formas);
- d_3: escolher a terceira letra (2 formas);
- d_4: escolher a quarta letra (1 forma).

Concluímos que há um total de

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

anagramas diferentes da palavra UFPE.

Permutações

Considere um conjunto de n elementos, por exemplo:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Cada combinação de todos esses elementos em um arranjo ordenado é conhecida como uma permutação. Note que o número de permutações diferentes dos n elementos do conjunto é dada por:

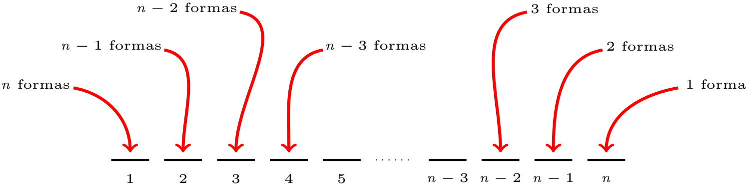
$$n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Denotamos este valor por $n!$ e o chamamos de n fatorial.

De fato, usamos o princípio multiplicativo pois, para formar permutações do tipo:

a_2	a_4	a_1	a_n	a_7	......	a_{n-2}	a_5	a_{n-1}	a_{10}
1	2	3	4	5		$n-3$	$n-2$	$n-1$	n

temos:



e portanto, $n!$ formas diferentes de arranjar os elementos!

Fatorial

Fica fixada a notação:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

na qual iremos supor que $0! = 1$.

Lembrete

O número de permutações de um conjunto com n elementos é $n!$

Exemplo 3.3

Suponha que desejamos que pretendemos colocar em uma prateleira 7 livros, nos quais há:

- 4 *livros de probabilidade;*
- 1 *livro de combinatória;*
- 2 *livros de cálculo.*

Se desejamos que os livros do mesmo assunto fiquem juntos, de quantas formas podemos arranjá-los?

Solução. *Podemos tomar as decisões:*

- d_1: *arranjar os livros de probabilidade entre si* (4! *formas);*
- d_2: *arranjar os livros de combinatória entre si* (1 *forma);*
- d_3: *arranjar os livros de cálculo entre si* (2! *formas);*
- d_4: *arranjar os assuntos na prateleira* (3! *formas).*

Portanto, são possíveis $(3!) \times (4!) \times 1 \times (2!) = 288$ *arranjos.*

Exemplo 3.4

Quantos são os anagramas da palavra PERNAMBUCO:

1. *que começam por consoante e terminam por vogal?*
2. *que têm as letras P, E, R juntas nessa ordem?*
3. *que têm as letras P, E, R juntas em qualquer ordem?*
4. *que têm a letra P no* 1^o *lugar ou a letra E no* 2^o *lugar ou a letra R no* 3^o *lugar?*

Solução do Exemplo 3.4.

1. Quantos são os anagramas da palavra PERNAMBUCO que começam por consoante e terminam por vogal?

Note que temos 6 consoantes e 4 vogais, então:

$$\underset{6\text{ formas}}{\_\_\_}\ \overbrace{\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_}^{8!\text{ formas}}\ \underset{4\text{ formas}}{\_\_\_}$$

... temos $6 \times 4 \times 8! = 967.680$ anagramas possíveis

2. Quantos são os anagramas da palavra PERNAMBUCO que têm as letras P, E, R juntas nessa ordem?

É suficiente penas as letras PER juntas como sendo uma única letra. Logo teríamos que formar anagramas com as "8" letras:

$$\text{PER, N, A, M, B, U, C, O}$$

Isto é, temos $8! = 40.320$ anagramas possíveis.

3. Quantos são os anagramas da palavra PERNAMBUCO que têm as letras P, E, R juntas em qualquer ordem?

Neste caso temos $3! \times 8! = 241.920$ anagramas (explique!).

4. Quantos são os anagramas da palavra PERNAMBUCO que têm a letra P no 1º lugar ou a letra E no 2º lugar ou a letra R no 3º lugar?

Definimos os seguintes conjuntos:

- P_1: conjunto dos anagramas que têm a letra P no 1º lugar;
- E_2: conjunto dos anagramas que têm a letra E no 2º lugar;
- R_3: conjunto dos anagramas que têm a letra R no 3º lugar.

Note que queremos saber $|P_1 \cup E_2 \cup R_3| = ?$ Vamos usar que:

$$|P_1 \cup E_2 \cup R_3| = |P_1| + |E_2| + |R_3| - |P_1 \cap E_2| - |P_1 \cap R_3| - |E_2 \cap R_3| + |P_1 \cap E_2 \cap R_3|.$$

. . . continuação. Como:

$$|P_1| = |E_2| = |R_3| = 9!,$$

$$|P_1 \cap E_2| = |P_1 \cap R_3| = |E_2 \cap R_3| = 8!$$

e

$$|P_1 \cap E_2 \cap R_3| = 7!$$

concluímos que

$$|P_1 \cup E_2 \cup R_3| = 3 \times 9! - 3 \times 8! + 7! = 975.720.$$

Exemplo 3.5

De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de dois lugares de modo que em cada banco fiquem um homem e uma mulher?

Solução. *Vamos acomodar primeiro os homens: O 1^o homem tem 10 lugares disponíveis. Depois, o 2^o tem 8 lugares. Para o 3^o ficam 6 lugares. Para o 4^o ficam 4. Finalmente, o último homem pode escolher entre 2 lugares. Logo podem se acomodar de*

$$10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \text{ formas.}$$

Uma vez acomodados os homens restam 5 lugares para as 5 mulheres. Portanto, elas podem se sentar de 5! formas. Assim, a turma pode se organizar de

$$10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! \text{ maneiras diferentes.}$$

Exemplo 3.6

De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em 2 grupos de 4 pessoas cada?

Solução. *Identifiquemos as 8 pessoas com os elementos do conjunto*

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\}.$$

Podemos colocar as 8 pessoas em fila e dividindo-as de modo que o 1^o *grupo seja formado pelas 4 primeiras e o* 2^o *pelas 4 últimas:*

$$a\ d\ e\ g\,|\,b\ c\ f\ h$$

Há $8!$ *modos de coloca-las desta forma mas ...*

⚠ *Note que embora a divisão* $a\ d\ e\ g\,|\,b\ c\ f\ h$ *é idêntica à divisão* $c\ f\ b\ h|a\ e\ g\ d$, *ambas foram contadas como sendo distintas.*

. . . continuação do Exemplo 3.6. Divisões como

$$a\ d\ e\ g\,|\,b\ c\ f\ h \quad \text{e} \quad c\ f\ b\ h|a\ e\ g\ d,$$

que diferem apenas pela ordem dos elementos em cada grupo, identificam os mesmos grupos, e portanto são iguais. Assim, cada divisão foi contada $2 \times 4! \times 4!$ vezes:

- 2 por causa da ordem dos grupos;
- $4!$ por causa da ordem dos elementos do 1^o grupo;
- $4!$ por causa da ordem dos elementos do 2^o grupo.

Se contarmos $8!$ divisões e cada divisão foi contada $2 \times 4! \times 4!$ vezes o número de divisões é

$$\frac{8!}{2 \times 4! \times 4!} = 35.$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

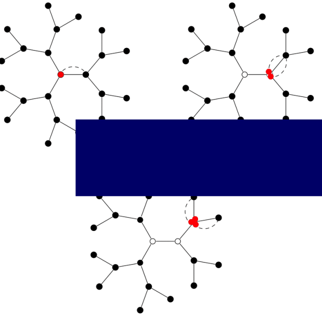
Referências e exercícios sugeridos!

- Carvalho, P. C. P. Métodos de Contagem e Probabilidade. IMPA, 2015.
- Morgado, Carvalho, Carvalho, Fernandez. Analise combinatoria e probabilidade. SBM, 1991.
- Ross, S. Probabilidade: Um curso moderno com aplicações, 8a ed., Bookman, 2010.

Exercícios:

- Capítulo 1 (Ross): 1.1, 1.2, 1.3, 1.7, 1.9, 1.10.

Entregar os exercícios em vermelho na segunda-feira 14/06!



Bom estudo!