

### Lista de exercícios 3

PGE950 - Probabilidade | PPGE - UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

1° Semestre de 2020

---

No que segue  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  denota um espaço de probabilidade. Isto é,  $\Omega$  é um conjunto não-vazio,  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  e  $P$  é uma probabilidade em  $\mathcal{F}$ .

#### Exercícios:

1. Prove que se  $A \in \mathcal{F}$  e  $P(A) \in \{0, 1\}$  então  $A$  é independente de  $B$  para todo  $B \in \mathcal{F}$ .
2. Sejam  $A, B, C$  eventos independentes. Mostre que  $A$  es independente de  $B \cup C^c$ .
3. Considere o experimento de jogar dois dados equilibrados e observe o número das faces superiores. Considere os eventos:  $A$  = "o número observado no primeiro dado é ímpar";  $B$  = "o número observado no segundo dado é ímpar" e  $C$  = "a soma dos números observados é ímpar". Mostre que  $A, B$  e  $C$  são independentes 2 a 2.
4. Considere o problema da ruína do jogador (ver material da Aula 3). Prove que:

(a) Para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  vale que

$$p_{i+1} - p_i = \left(\frac{q}{p}\right) (p_i - p_{i-1}).$$

(b) Use (a) para mostrar que para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$p_{i+1} = p_i + \left(\frac{q}{p}\right)^i p_1.$$

(c) Use (b) para encontrar o valor de  $p_1$  (note que deve diferenciar entre  $p = 1/2$  ou  $p \neq 1/2$ ).

(d) Conclua de (b) e (c) que

$$p_i = \begin{cases} \frac{1 - (\{1-p\}/p)^i}{1 - (\{1-p\}/p)^n}, & \text{si } p \neq 1/2, \\ i/n, & \text{si } p = 1/2, \end{cases}$$

---

#### ENTREGAR

os exercícios 2 e 4 por e-mail ou por WhatsApp, escrito à mão, até o dia 26/06.