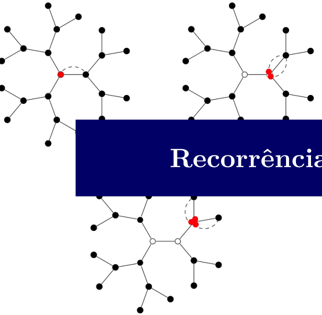
ET658 - Processos Estocásticos para Atuária

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE



Recorrência e transiência. Classes e irredutibilidade.

Prof. Pablo M. Rodriguez

https://www.pablo-rodriguez.org/et658-processos-estocasticos

Universidade Federal de Pernambuco

CCEN

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Conteúdo da Aula 5

- Recorrência e transiência.
- Classes;
- Irredutibilidade.

Lembrete: Cadeia de Markov

Uma cadeia de Markov a tempo discreto (CMTD) com espaço de estados $\mathcal{S}$ é um processo estocástico $(X_n)_{n\geq 0}$ com valores em $\mathcal{S}$ tal que

$$\underset{\text{futuro}}{P(X_{n+1}} = j|\underbrace{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}}_{\text{pasado}}, \underset{\text{presente}}{X_n} = i) = P(X_{n+1} = j|X_n = i),$$

para todo $n \geq 0$ e para todo subconjunto $\{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j\} \subset \mathcal{S}$.

Lembre que: para todo $i, j \in \mathcal{S}$ denotamos

- $p(i,j) := P(X_{n+1} = j|X_n = i)$, para todo $n \geq 0$;
- $p_n(i,j) := P(X_{m+n} = j|X_m = i)$, para todo $m, n \geq 0$.

Equações de Chapman-Kolmogorov

Proposição 5.1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$. *Então,*

$$p_{n+r}(i,j) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_n(i,k)p_r(k,j),$$

para todo $n, r \geq 0$ *e* $i, j \in \mathcal{S}$.

Corolário 5.1

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$. *Então,*

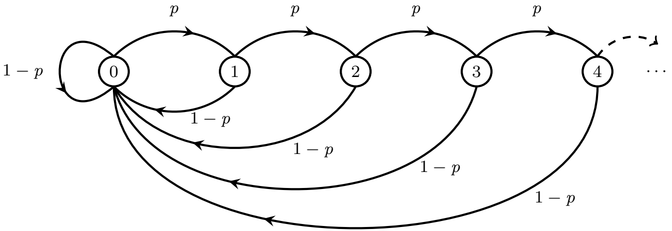
$$p_n(i,j) \geq p_{n_1}(i,i_1)\, p_{n_2}(i_1,i_2) \cdots p_{n_{k-1}}(i_{k-2},i_{k-1})\, p_{n_k}(i_{k-1},j),$$

onde $\{i, j, i_1, \ldots, i_{k-1}\} \subset \mathcal{S}$ *e* $n, n_i \in \mathbb{N}$ *são tais que*

$$n = \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell.$$

Exemplo 5.1

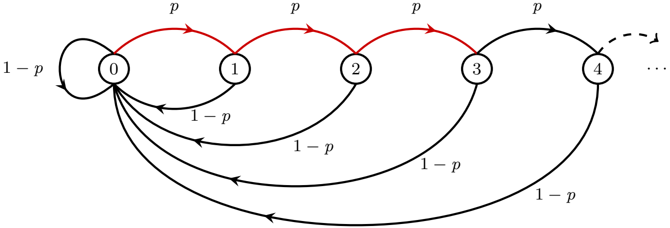
Considere a CMTD (Castelo de naipes):



e note que $p_6(0,2) > p_3(0,3)\,p_1(3,0)\,p_2(0,2) = p^5\,(1-p)$.

Exemplo 5.1

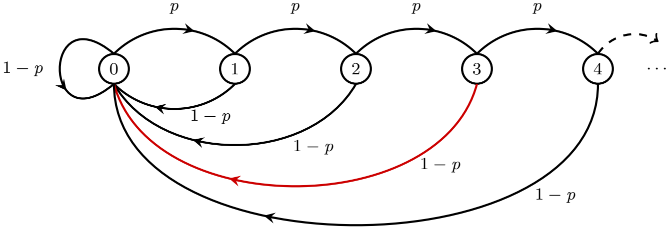
Considere a CMTD (Castelo de naipes):



e note que $p_6(0,2) > p_3(0,3)\, p_1(3,0)\, p_2(0,2) = p^5\,(1-p)$.

Exemplo 5.1

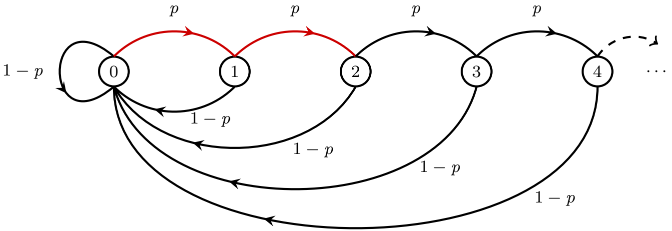
Considere a CMTD (Castelo de naipes):



e note que $p_6(0,2) > p_3(0,3)\, {\color{red} p_1(3,0)}\, p_2(0,2) = p^5\,(1-p)$.

Exemplo 5.1

Considere a CMTD (Castelo de naipes):



e note que $p_6(0,2) > p_3(0,3)\, p_1(3,0)\, p_2(0,2) = p^5\,(1-p).$

Recorrência e transiência

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados $\mathcal{S}$. Para $i \in \mathcal{S}$ seja

$$\tau_i := \inf\{n \geq 1 : X_n = i\},$$

com $\tau_i := \infty$ se o infimo não existe. Em palavras,

$$\tau_i := \text{ primeiro instante de tempo em que a cadeia visita o estado } i,$$

com $\tau_i := \infty$ no caso em que a cadeia não visita i após $n = 0$. Se

$$P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$$

dizemos que i é um estado recorrente. Se i não é recorrente dizemos que é transiente; isto é, se

$$P(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$$

dizemos que i é transiente.

Recorrência e transiência

Em outras palavras, um estado i é

- recorrente: se
$$P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1,$$
ou seja, se dado que a cadeia sai do estado i, então ela sempre retorna ao estado i em um tempo finito.

- transiente: se
$$P(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0,$$
ou seja, se dado que a cadeia sai do estado i, então existe uma chance desta nunca retornar ao estado i.

Propriedade

Para cada $n \geq 1$ definimos a variável indicadora

$$I_n := \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = i, \\ 0, & \text{se } X_n \neq i. \end{cases}$$

Então $I(i) := \sum_{n=0}^{\infty} I_n$ é o número de visitas do processo ao estado i.

Teorema 5.1

Seja $(X_n)_{n \geq 0}$ uma CMTD com espaço de estados $\mathcal{S}$ e seja $j \in \mathcal{S}$.

1. *Se j é transiente então $P(I(j) < \infty | X_0 = i) = 1$ para todo $i \in \mathcal{S}$.*
   - Isto é, o j é visitado apenas um número finito de vezes!
2. *Se j é recorrente então $P(I(j) = \infty | X_0 = j) = 1$.*
   - Isto é, o j é visitado infinitas vezes!

Critério para recorrência ou transiência

Teorema 5.2

Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma CMTD com espaço de estados* $\mathcal{S}$ *e probabilidades de transição* $p(i,j)$ *para* $i,j \in \mathcal{S}$*. Então*

$$i \in \mathcal{S} \text{ é recorrente se, e somente se, } \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i) = \infty.$$

Algumas definições:

- Dizemos que os estados $i, j \in \mathcal{S}$ estão na mesma classe se existem constantes $n_1 \geq 0$ e $n_2 \geq 0$ tais que

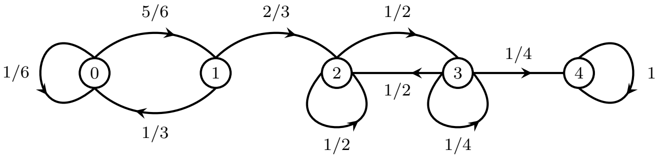
$$p_{n_1}(i, j) > 0 \text{ e } p_{n_2}(j, i) > 0.$$

- Dizemos que uma CMTD é irredutível se todos seus estados pertencem à mesma classe.

Exemplo 5.2

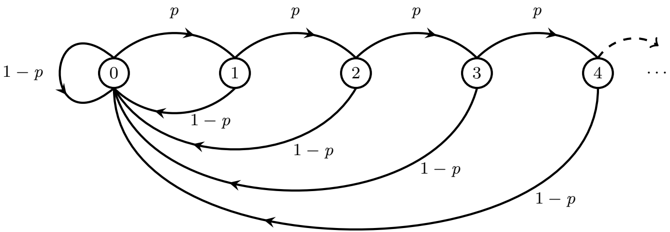
Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ *uma cadeia de Markov com espaço de estados* $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *e matriz de transição:*

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Note que existem três clases: $\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{2, 3\}$ *e* $\mathcal{C}_3 = \{4\}$.

... voltando ao Exemplo 5.1. Note que a CMTD:



é irredutível pois, para qualquer $i \neq j$ temos que:

- $p_{j-i}(i,j) = p^{j-i} > 0,$
- $p_{i+1}(j,i) = (1-p)\,p^{i} > 0.$

Corolário 5.2

Se dois estados i e j estão na mesma classe e o estado i é recorrente, então o estado j é recorrente.

Prova. Se i e j, $i \neq j$, estão na mesma classe então existem $m > 0$ e $n > 0$ tais que

$$p_m(i,j) > 0 \text{ e } p_n(j,i) > 0.$$

Suponha que i é recorrente e note que

$$p_{n+r+m}(j,j) \geq p_n(j,i)\, p_r(i,i)\, p_m(i,j).$$

Logo,

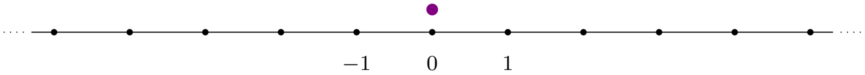
$$\sum_{r=1}^{\infty} p_{n+r+m}(j,j) \geq p_n(j,i)\, p_m(i,j) \sum_{r=1}^{\infty} p_r(i,i) = \infty.$$

somando em r

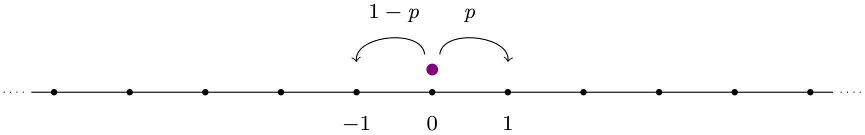
pois i é recorrente

... portanto j é recorrente.

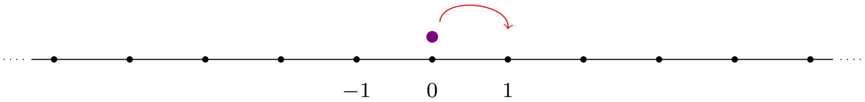
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



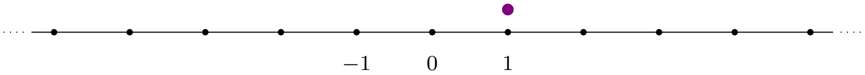
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



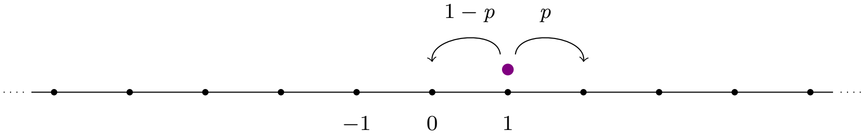
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



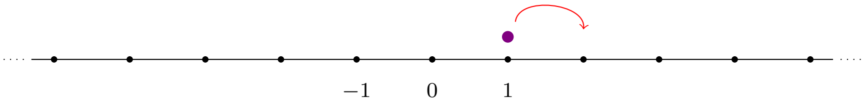
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



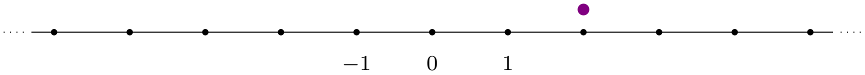
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



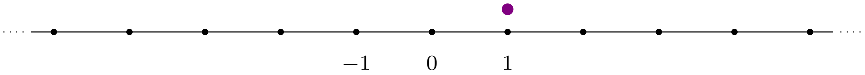
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



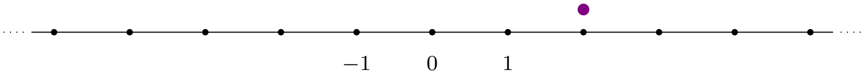
Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$



Exemplo: o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

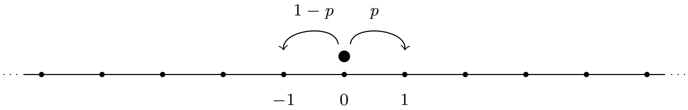


Pergunta: existe uma chance de não retornar ao ponto de partida?

O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$

O passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ é a cadeia de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ com espaço de estados $\mathbb{Z}$ e probabilidades de transição:

$$p(i,j) = P(Y_{n+1} = j | Y_n = i) = \begin{cases} p, & \text{para } j = i+1, \\ 1-p, & \text{para } j = i-1, \\ 0, & \text{para } j \neq i \pm 1. \end{cases}$$



Teorema 5.3

O Passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ é recorrente se, e somente se, $p = 1/2$.

Prova. Vamos analisar $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i)$. Note que $p_{2n-1}(0,0) = 0$ para $n \geq 1$ enquanto que

$$p_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

De fato, dado $X_0 = 0$, para $X_{2n} = 0$, uma configuração favorável é:

$$\sigma : \underset{1}{\underline{\leftarrow}} \quad \underset{2}{\underline{\rightarrow}} \quad \underset{3}{\underline{\leftarrow}} \quad \underline{\rightarrow} \quad \underline{\leftarrow} \quad \cdots\cdots \quad \underline{\rightarrow} \quad \underline{\leftarrow} \quad \underset{2n-1}{\underline{\rightarrow}} \quad \underset{2n}{\underline{\leftarrow}}$$

n à esquerda ($\leftarrow$)
n à direita ($\rightarrow$)

Mas há $\binom{2n}{n}$ formas diferentes de obter uma configuração destas e

$$P(\sigma) = p^n(1-p)^n,$$ por independência!

Denotamos $q := 1 - p$. Então

$$p_{2n}(0,0) = \left\{ \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right\} (p\, q)^n$$

e usamos a fórmula de Stirling:

$$n! \sim n^n \, e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

representando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n \, e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1,$$

para obter

$$p_{2n}(0,0) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \infty \text{ se, e somente se, } p = \frac{1}{2}.$$

Classes fechadas

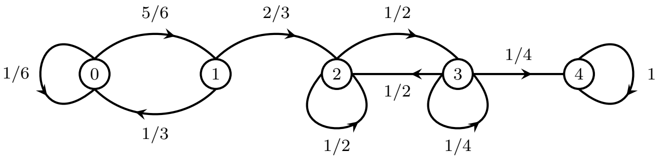
Dizemos que uma classe $\mathcal{C}$ de estados de uma CMTD é fechada se:

$$\text{para todo } i \in \mathcal{C} \text{ e } j \notin \mathcal{C} \text{ vale que } P(\tau_j < \infty | X_0 = i) = 0.$$

Teorema 5.4

Uma classe finita $\mathcal{C}$ é recorrente se, e somente se, é fechada.

Na CMTD do Exemplo 5.2:



temos as três clases:

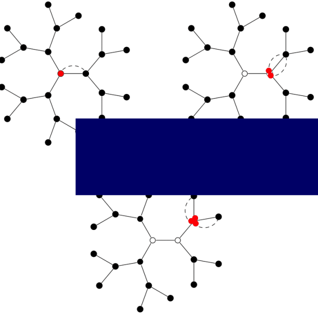
- $\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}$ (aberta)
- $\mathcal{C}_2 = \{2, 3\}$ (aberta)
- $\mathcal{C}_3 = \{4\}$ (fechada)

Discussão

Discutir exemplos.
com $|\mathcal{S}| = \infty$

Referência!

Ross, S. Introduction to Probability Models. 10th ed. Academic Press. 2010.



Bom estudo!