Lista de exercícios 0 - Revisão

PGE977 - Tópicos Especiais em Processos Estocásticos | 2° Semestre de 2020

Programa de Pós-graduação em Estatística da UFPE

Prof. Pablo M. Rodriguez

---

1. Prove a Fórmula de inclusão-exclusão: se $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Dica: Prove por indução em n.

2. Se $P(A_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ prove que $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$.

3. Se $P(A_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ prove que $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$.

4. Se $A, B, C \in \mathcal{F}$ prove que: $P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap C^c)P(C^c|B)$.

5. Prove que se $A \in \mathcal{F}$ e $P(A) \in \{0, 1\}$ então A é independente de B para todo $B \in \mathcal{F}$.

6. Sejam A, B, C eventos independentes. Mostre que A es independente de $B \cup C^c$.

7. Suponha que A e B são tais que $P(A|B) = P(B|A)$, $P(A \cup B) = 1$ e $P(A \cap B) > 0$. Prove que $P(A) > 1/2$.

8. Seja X uma variável aleatória e seja $x_n \searrow y$. Mostre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \le x_n\} = \{X \le y\}$.

9. Seja X uma variável aleatória e seja $x_n \nearrow +\infty$. Mostre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le x_n\} = \Omega$.

10. Suponha que temos 3 moedas: uma moeda honesta, uma moeda que da cara com probabilidade $0,3$ e uma moeda que da cara com probabilidade $0,9$. Suponha que uma destas moedas é escolhida ao acaso e lançada 5 vezes.

    (a) Qual é a probabilidade de que a moeda de cara exatamente 3 das 5 jogadas?

    (b) Dado que a primeira dessas 5 jogadas dê cara, qual é a probabilidade condicional de que exatamente 4 das 5 jogadas deem cara?

    (c) Dado que a moeda escolhida de cara exatamente 2 das 5 jogadas, qual é a probabilidade condicional de que a moeda escolhida seja a moeda honesta?

11. Seja $p(k) = P(X = k)$ a função de probabilidade correspondente a uma distribuição de Poisson com parâmetro λ. Verifique que $p(0) = e^{-\lambda}$ e que $p(k) = (\lambda/k)p(k-1)$.

12. Seja $X \sim Geom(p)$. Prove que $P(X = n + k|X > n) = P(X = k)$. Interprete esta propriedade.